

Příklad 5.1. Kinematika vázané soustavy (hmotných) bodů. Vazba lanem délky L .

Dáno: konstanty V, L, h ;
rychlost bodu A jako funkce jeho polohy

$$\left(\frac{v_A}{V}\right)^2 + \left(\frac{2x_A}{\sqrt{L^2 - h^2}} - 1\right)^2 = 1; \quad (1)$$

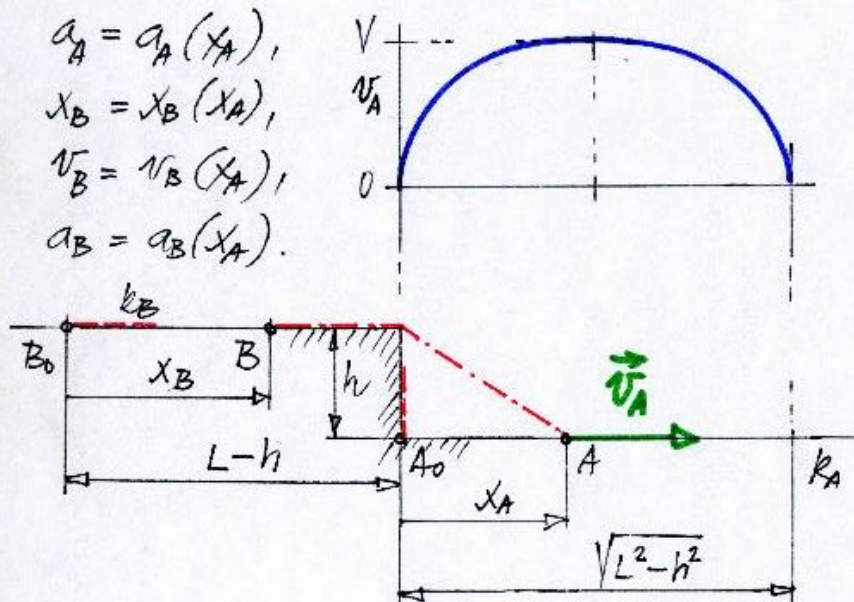
Uřít:

$$a_A = a_A(x_A),$$

$$x_B = x_B(x_A),$$

$$v_B = v_B(x_A),$$

$$a_B = a_B(x_A).$$



Zrychlení bodu A. Protože je rychlost v_A dána jako funkce polohy x_A , použijeme

KIN-05-1.1

vztah

$$a_A = v_A \frac{dv_A}{dx_A}$$

Derivaci dv_A/dx_A určíme implicitním derivováním vztahu (1)

$$2 \frac{v_A}{V^2} \frac{dv_A}{dx_A} + 2 \left(\frac{2x_A}{\sqrt{L^2 - h^2}} - 1 \right) \frac{2}{\sqrt{L^2 - h^2}} = 0$$

Z toho přímo

$$a_A = v_A \frac{dv_A}{dx_A} = 2 \frac{\sqrt{L^2 - h^2} - 2x_A}{L^2 - h^2} V^2$$

Poloha bodu B.

Rovnice vazby, vyjadřující konstantu délku lana je

$$L = L - h - x_B + \sqrt{h^2 + x_A^2}$$

Z toho

$$x_B = \sqrt{h^2 + x_A^2} - h.$$

Pro následný výpočet rychlosti upravíme na

$$x_B + h = \sqrt{h^2 + x_A^2}$$

resp. $(x_B + h)^2 = h^2 + x_A^2. \quad (2)$

Rychlost bodu B. Podle definice je

$$v_B = \frac{dx_B}{dt}.$$

Derivaci vypočteme implicitním derivováním vztahu (2).

$$2(x_B + h)\dot{x}_B = 2x_A\dot{x}_A. \quad (3)$$

Z toho

$$\dot{x}_B = v_B = \frac{x_A}{x_B + h} v_A$$

nebo také

$$v_B = \frac{x_A}{\sqrt{h^2 + x_A^2}} v_A.$$

Zrychlení bodu B. Podle definice je

$$a_B = \frac{dv_B}{dt}.$$

Derivaci vypočteme implicitním

KIN-05-1.2

derivováním vztahu (3).

$$\dot{x}_B^2 + (x_B + h)\ddot{x}_B = \dot{x}_A^2 + x_A\ddot{x}_A.$$

Z toho

$$\ddot{x}_B = a_B = \frac{v_A^2 + x_A a_A - v_B^2}{x_B + h}$$

nebo

$$a_B = \frac{v_A^2 + x_A a_A - \frac{x_A^2 v_A^2}{h^2 + x_A^2}}{\sqrt{h^2 + x_A^2}}$$