

Příklad 5.2 Kinematika vázané soustavy (hmotných) bodů. Vazba tuhé délky L .

HB A se pohybuje po vertikální přímce, která je osou parabolické trajektorie HB B.

Dáno:

konstanty L, k, p ; A
rovnice trajektorie

$k_B: y = px^2$;

rychlost HB A

$v_A(t) = v_{A0} - kt$;

poč. podmín. pro y_A

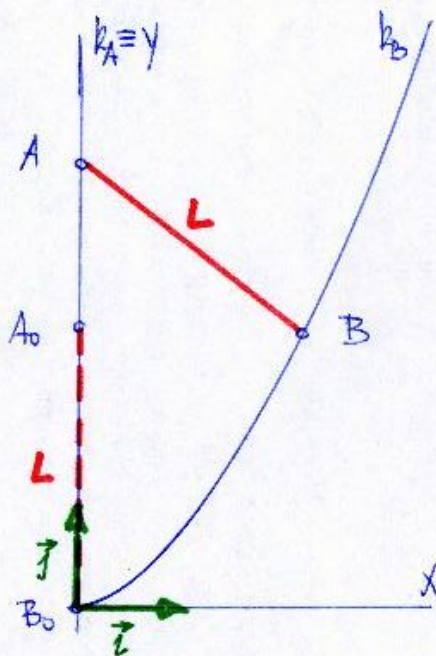
$y_A(0) = L$.

Uvěřit:

kinematické veličiny $\vec{r}_A(t), \vec{a}_A(t)$ HB A.

kinematické veličiny $\vec{r}_B(t), \vec{v}_B(t), \vec{a}_B(t)$ HB B.

konstrukce R tak, "aby se tuž upevnila".



Polohový vektor $\vec{r}_A$ bodu A.

$$\vec{r}_A(t) = x\vec{i} + y_A(t)\vec{j}$$

Složku (soustavici) y_A můžeme z dif. rovnice

$$v_A = v_{Ay} = \frac{dy_A}{dt}$$

separací

$$dy_A = (v_{A0} - kt)dt$$

a integrací

$$y_A(t) = L + \int_0^t (v_{A0} - kt)dt$$

s výsledkem

$$y_A(t) = L + v_{A0}t - k\frac{t^2}{2}, \quad (1)$$

Zrychlení $\vec{a}_A$ bodu A

můžeme jako

$$\vec{a}_A = \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{dv_A}{dt} \vec{j},$$

kde $\frac{dv_A}{dt} = -k$.

Tedy $\vec{a}_A = -k\vec{j}$.

Pohybový vektor $\vec{r}_B$ bodu B

$$\vec{r}_B(t) = x_B(t) \vec{i} + y_B(t) \vec{j}.$$

Průběh se bod B pohybuje po dané trajektorii k_B , platí

$$y_B = p x_B^2. \quad (2)$$

Současně platí vztahová rovnice, vyjadřující konstantu ($=L$) vzdálenost bodu B od bodu A

$$x_B^2 + (y_B - y_A)^2 = L^2.$$

Dosaďme za x_B z rovnice (1) a upravíme

$$\frac{y_B}{p} + y_B^2 - 2y_A y_B + y_A^2 = L^2.$$

To je kvadratická rovnice pro y_B . Standardní tvar je

$$y_B^2 + \left(\frac{1}{p} - 2y_A\right) y_B + y_A^2 - L^2 = 0. \quad (3)$$

KIN-05-2.2

Řešení rovnice jsou kořeny

$$y_{B1,2} = \frac{2y_A - \frac{1}{p} \pm \sqrt{\left(2y_A - \frac{1}{p}\right)^2 - 4(y_A^2 - L^2)}}{2}$$

Platný kořen je ten s menší hodnotou y_B . Tedy po úpravě

$$y_B = y_A - \frac{1}{2p} - \sqrt{L^2 - \frac{y_A}{p} + \frac{1}{4p^2}} \quad (4)$$

a z rovnice (1)

$$x_B = \sqrt{\frac{y_B}{p}}.$$

Pozn: Do výsledků pro y_B, x_B není nutno zavést hypotetickou funkci y_A . Při podrobném derivování je ale třeba mít časovou proměnnost y_A považovat. Rychlost bodu B je vektor

$$\vec{v}_B(t) = v_{Bx}(t) \vec{i} + v_{By}(t) \vec{j},$$

přičemž

$$v_{Bx} = \frac{dx_B}{dt}, \quad v_{By} = \frac{dy_B}{dt}.$$

Derivace můžeme implicitněm derivováním, nejprve vztahu (3). Je

$$2y_B \dot{y}_B - 2\dot{y}_A y_B + \left(\frac{1}{p} - 2y_A\right) \dot{y}_B + 2y_A \dot{y}_A = 0. \quad (5)$$

Z toho vyplývá

$$\dot{y}_B = v_{By} = \frac{y_B - y_A}{y_B - y_A + \frac{1}{2p}} v_A.$$

x-ovou složku rychlosti bodu B můžeme z (2):

$$\dot{y}_B = 2px_B \dot{x}_B, \quad (6)$$

takže

$$\dot{x}_B = v_{Bx} = \frac{\dot{y}_B}{2px_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B + 2px_B(y_B - y_A)} v_A.$$

KIN-05-23

Zrychlení $\vec{a}_B$ bodu B

je vektor

$$\vec{a}_B(t) = a_{Bx}(t) \vec{i} + a_{By}(t) \vec{j},$$

kde

$$a_{Bx} = \frac{dv_{Bx}}{dt}, \quad a_{By} = \frac{dv_{By}}{dt}.$$

Obo derivace můžeme opět implicitněm derivováním. Nejprve vztahu (5) (po dělení 2)

$$\dot{y}_B^2 + y_B \ddot{y}_B - \dot{y}_A y_B - \dot{y}_A \dot{y}_B - \dot{y}_A \dot{y}_B + \left(\frac{1}{2p} - y_A\right) \ddot{y}_B + \dot{y}_A^2 + y_A \ddot{y}_A = 0.$$

Neznámé je $\ddot{y}_B$, takže

$$\ddot{y}_B = a_{By} = \frac{(y_B - y_A) \ddot{y}_A + 2\dot{y}_A \dot{y}_B - \dot{y}_A^2 - \dot{y}_B^2}{y_B - y_A + \frac{1}{2p}}.$$

neboli

$$a_{By} = \frac{(y_B - y_A) a_A + 2v_A v_{By} - v_A^2 - v_{By}^2}{y_B - y_A + \frac{1}{2p}}.$$

Za vztah (6) máme

$$\ddot{y}_B = 2p(\dot{x}_B^2 + x_B \ddot{x}_B)$$

a z toho

$$\ddot{x}_B = a_{BX} = \frac{\frac{\ddot{y}_B}{2p} - \dot{x}_B^2}{x_B} ,$$

neboli

$$a_{BX} = \frac{\frac{a_{BY}}{2p} - v_{BX}^2}{x_B} .$$

Uvědom k, "aby se tyč nepřetrhla",

Važbuou podmínku, aby vzdálenost
bodů A a B byla L , lze splnit jen
když y_B vypočtené ze (4) je reálné
číslo. To znamená, že člen pod od-
mocninou musí být kladný. Tedy

$$L^2 - \frac{y_A}{p} + \frac{1}{4p^2} > 0 .$$

KIN-05-2.4

Tato nerovnost je splněna, když

$$y_A < pL^2 + \frac{1}{4p} ,$$

neboli také když

$$y_{Amax} < pL^2 + \frac{1}{4p} . \quad (7)$$

Maximum y_{Amax} pro y_A podle (1)
vystává v okamžiku t^* , kdy

$$\left. \frac{dy_A}{dt} \right|_{t=t^*} = 0 ,$$

neboli

$$v_{A0} - kt^* = 0 .$$

Z toho

$$t^* = \frac{v_{A0}}{k} ,$$

takže podle (1)

$$y_{Amax} = y_A(t^*) = L + \frac{v_{A0}^2}{2k}$$

Řešení nerovnosti (7) pro k pak je

$$k > \frac{v_{A0}^2}{2(pL^2 - L + \frac{1}{4p})} .$$