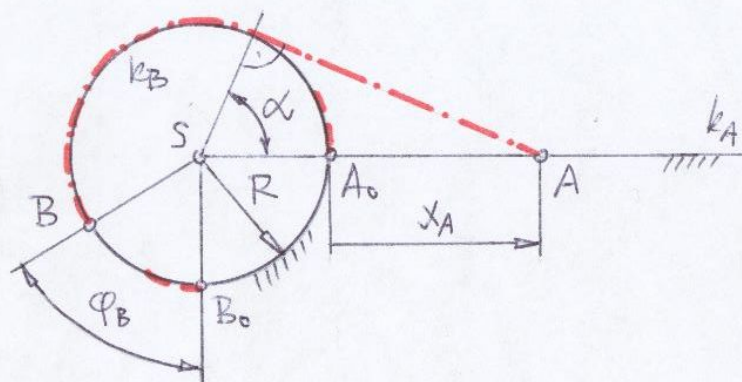


Příklad 5.3. Kinematika vázané soustavy (hnutých) bodů. Bod A se pohybuje po přímkové trajektorii k_A , bod B po kružnici k_B . Vazba je realizována lemem, vedeným po oblouku kružnice k_B . Východní polohy bodů jsou označeny A_0, B_0 .



Dáno: konstanty R, v_{A0} ;

rychlost bodu A $v_A = v_{A0} \left(1 - \frac{x_A}{L}\right)$.

Určit:

délku lanka L ; zrychlení a_A bodu A;

kinematické veličiny bodu B:

$\varphi_B(x_A), v_B(x_A), a_B(x_A)$.

KIN-05-3.1

Délka lanka L je dána délkou oblouku mezi body A_0, B_0

$$L = \frac{3\pi}{2} R.$$

Zrychlení bodu A. Prohře rychlost v_A je dána jako funkce dráhy x_A , použijeme vztah

$$a_A = v_A \frac{dv_A}{dx_A} = v_{A0} \left(1 - \frac{x_A}{L}\right) \left(-\frac{v_{A0}}{L}\right) = -\frac{v_{A0}^2}{L} \left(1 - \frac{x_A}{L}\right).$$

Poloha bodu B je na kružnici k_B jednoznačně určena polohovým úhlem φ_B .

Určíme ji z vazebních podmínek pro délku lanka

$$L = \frac{3\pi}{2} R = \left(\frac{3\pi}{2} - \varphi_B - \alpha\right) R + R \tan \alpha,$$

takže

$$\varphi_B = \tan \alpha - \alpha. \quad (1)$$

Pro pomocný úhel α platí

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+x_A} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{R}{R+x_A}, (2)$$

takže

$$\varphi_B(x_A) = \frac{1}{2} \arccos \frac{R}{R+x_A} - \arccos \frac{R}{R+x_A}.$$

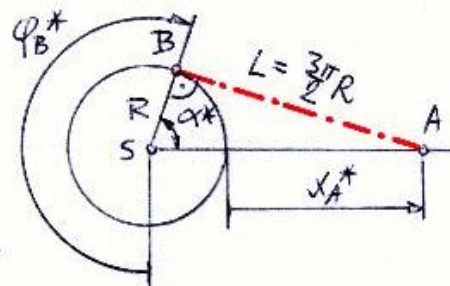
To ale platí, jen pokud odstředivá ležící na oblouku kružnice k_B . Tedy jen pokud (podle obrázku)

$$\varphi_B \leq \varphi_B^*,$$

$$\varphi_B^* = \frac{3\pi}{2} - \alpha^*,$$

$$\frac{1}{2} \alpha^* = \frac{L}{R} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\cos \alpha^* = \frac{R}{R+x_A^*}.$$

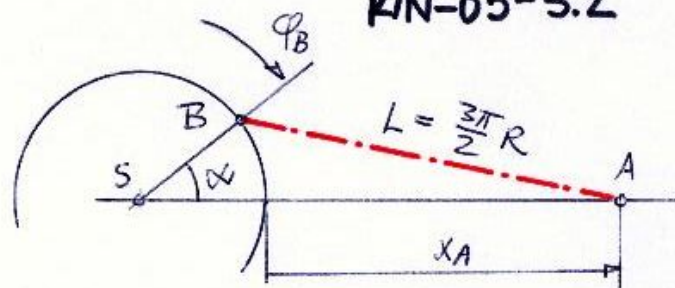


Omezení pro x_A tak vychází

$$x_A \leq x_A^* = R \left(\frac{1}{\cos \arctan \frac{3\pi}{2}} - 1 \right)$$

Pro $x_A > x_A^*$ se situace změní.

KIN-05-3.2



Kosinová věta pro obecný $\triangle ABS$ je

$$L^2 = R^2 + (R+x_A)^2 - 2R(R+x_A) \cos \alpha, (3)$$

takže

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + (R+x_A)^2 - L^2}{2R(R+x_A)}, (4)$$

Protože

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \varphi_B, (5)$$

je

$$\varphi_B = \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{R^2 + (R+x_A)^2 - \left(\frac{3\pi R}{2}\right)^2}{2R(R+x_A)}.$$

Nakonec úplný výsledek

$$\varphi_B(x_A) = \begin{cases} \frac{1}{2} \arccos \frac{R}{R+x_A} - \arccos \frac{R}{R+x_A} & x_A \leq x_A^* \\ \frac{3\pi}{2} - \arccos \frac{R^2 + (R+x_A)^2 - \left(\frac{3\pi R}{2}\right)^2}{2R(R+x_A)} & x_A^* < x_A. \end{cases}$$

Další kinematické veličiny vyjádříme v souřadnicovém systému "tečna, normála".

Rychlost bodu B je derivace proběhnuté dráhy podle času

$$v_B = \frac{ds_B}{dt}.$$

Proběhnutá dráha je v našem případě délka oblouku $\widehat{B_0B}$, tedy

$$s_B = R\varphi_B.$$

Je tedy

$$v_B = \frac{d}{dt}(R\varphi_B) = R \frac{d\varphi_B}{dt} = R\dot{\varphi}_B.$$

Časovou derivaci $\dot{\varphi}_B$ máme implicitním derivováním. Pro $x_A \leq x_A^*$ budeme derivovat vztahy (1) a (2).

$$\dot{\varphi}_B = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \dot{\alpha} - \dot{\alpha} \quad (6)$$

$$-\sin \alpha \dot{\alpha} = -\frac{R}{(R+x_A)^2} \dot{x}_A, \quad (7)$$

KIN-05-3.3

takže

$$\dot{\varphi}_B = \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \frac{R}{\sin \alpha (R+x_A)^2} \dot{x}_A,$$

přičemž α závisí na x_A podle (2).

Pro $x_A^* < x_A$ budeme derivovat (3) a (5) s výsledkem

$$0 = 2(R+x_A)\dot{x}_A - 2R\dot{x}_A \cos \alpha + 2R(R+x_A) \sin \alpha \dot{\alpha} \quad (8)$$

$$\dot{\alpha} = -\dot{\varphi}_B, \quad (9)$$

takže

$$\dot{\varphi}_B = \frac{R+x_A - R \cos \alpha}{R(R+x_A) \sin \alpha} \dot{x}_A,$$

přičemž α závisí na x_A podle (4). Některé po úpravě a dosazení

$$v_B = R\dot{\varphi}_B = \begin{cases} \frac{R^2 \sin \alpha}{(R+x_A)^2 \cos^3 \alpha} v_A & x_A \leq x_A^* \\ \frac{R(1-\cos \alpha) + x_A}{(R+x_A) \sin \alpha} v_A & x_A^* < x_A, \end{cases} \quad \text{pro}$$

kde

$$\alpha = \begin{cases} \arccos \frac{R}{R+x_A} & x_A \leq x_A^* \\ \arccos \frac{R^2 + (R+x_A)^2 - (\frac{3\pi}{2}R)^2}{2R(R+x_A)} & x_A^* < x_A \end{cases} \quad \text{pro} \quad (10)$$

Zrychlení bodu B má složku normální a_{Bn} a tečnou a_{Bt} . Protože poloměr křivosti kružnice je R , platí pro normální složku

$$a_{Bn} = \frac{v_B^2}{R},$$

neboli

$$a_{Bn} = \begin{cases} \frac{R^3 \sin^2 \alpha}{(R+x_A)^4 \cos^4 \alpha} v_A^2 & x_A \leq x_A^* \\ \frac{[R(1-\cos \alpha) + x_A]^2}{R(R+x_A)^2 \sin^2 \alpha} v_A^2 & x_A^* < x_A \end{cases} \quad \text{pro}$$

když pro α opět platí (10).

Tečnou složku zrychlení je denová v_B podle času, tj.

$$a_{Bt} = R \ddot{\varphi}_B.$$

Pro $x_A \leq x_A^*$ budeme derivovat (6) a (7)

$$\ddot{\varphi}_B = 2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{R} \ddot{\alpha},$$

$$\cos \alpha \dot{\alpha}^2 + \sin \alpha \ddot{\alpha} = -\frac{2R \dot{x}_A^2}{(R+x_A)^3} + \frac{R}{(R+x_A)^2} \ddot{x}_A,$$

Po úpravě a dosazení $\dot{x}_A = v_A$, $\ddot{x}_A = a_A$ máme

$$\ddot{\varphi}_B = \frac{R \sin \alpha}{(R+x_A)^2 \cos^2 \alpha} a_A - \frac{2R \sin \alpha}{(R+x_A)^3 \cos^3 \alpha} v_A^2 + \frac{\sin \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}{\cos^3 \alpha} \dot{\alpha}^2$$

V intervalu $x_A^* < x_A$ derivujeme (8) a (9).

$$0 = \dot{x}_A^2 + (R+x_A) \ddot{x}_A - R \ddot{x}_A \cos \alpha + R \dot{x}_A \sin \alpha \dot{\alpha} + \\ + R \dot{x}_A \sin \alpha \dot{\alpha} + R(R+x_A) \cos \alpha \dot{\alpha}^2 + R(R+x_A) \sin \alpha \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} = -\ddot{\varphi}_B$$

Z toho po úpravě a dosazení

$$\ddot{\varphi}_B = \frac{v_A^2 + [R(1-\cos \alpha) + x_A] a_A + 2R \dot{x}_A \sin \alpha \dot{\alpha} + R(R+x_A) \cos \alpha \dot{\alpha}^2}{R(R+x_A) \sin \alpha}$$