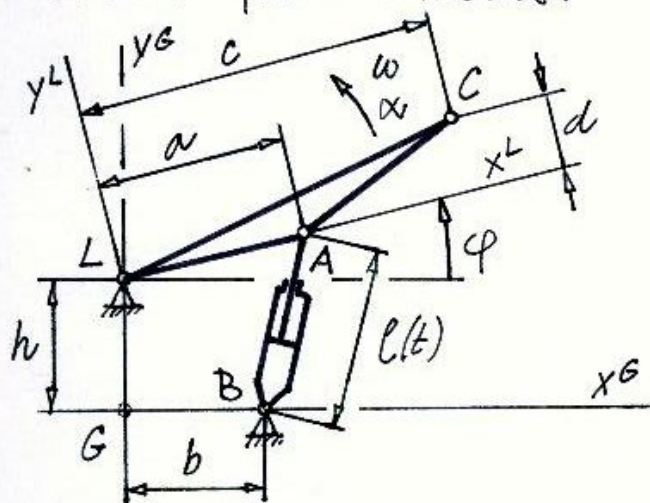


Příklad 7.1. Kinematika zvedacího zařízení podle obrázku.



Dáno: konstanty L, T ;

rozměry a, b, c, d, h ;

závislost

$$l(t) = 4L \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

Určit:

kinematické veličiny φ, ω, α rotačního pohybu tělesa LAC;

Kinematické veličiny $\vec{v}_0, \vec{a}_0$

v GSS (G, x^G, y^G) a v LSS (L, x^L, y^L) .

KIN-07-1.1

Řešení: Zavedeme globální a lokální polohové vektory

$$\mathbf{r}_L^G = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_B^G = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_A^L = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{r}_C^L = \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix}$$

a napíšeme transformační rovnici pohybu ramene LAC pro bod A

$$\mathbf{r}_A^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_A^L,$$

kteřá platí spolu s podmínkou pro vzdálenost $\overline{AB}$ re tržku

$$\overline{AB} = l(t). \quad (1)$$

Vzdálenost $\overline{AB}$ můžeme zapsat pomocí skalárního součinu

$$\overline{AB}^2 = (\mathbf{r}_A^G - \mathbf{r}_B^G) \cdot (\mathbf{r}_A^G - \mathbf{r}_B^G),$$

přičemž

$$\mathbf{r}_A^G - \mathbf{r}_B^G = \mathbf{r}_L^G - \mathbf{r}_B^G + \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_A^L.$$

$\mathbf{T}^{GL}$ je zde transformační matice pro rotaci okolo osy $z^L \parallel z^G$, takže platí

$${}^G L {}^L r_A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

$${}^G r_A - {}^G r_B = \begin{bmatrix} 0 - b + a \cos \varphi \\ h - 0 + a \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

a skalární součin

$$\begin{aligned} ({}^G r_A - {}^G r_B) \cdot ({}^G r_A - {}^G r_B) &= (-b + a \cos \varphi)^2 + (h + a \sin \varphi)^2 = \\ &= b^2 - 2ab \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi + h^2 + 2ah \sin \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = \\ &= 2a(-b \cos \varphi + h \sin \varphi) + b^2 + h^2 + a^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= 2a(-b \cos \varphi + h \sin \varphi) + b^2 + h^2 + a^2. \end{aligned}$$

Výsledek dosadíme do druhé mocniny podmínky (1) a máme

$$2a(-b \cos \varphi + h \sin \varphi) + b^2 + h^2 + a^2 = l^2.$$

Upravíme na tvar

$$-b \cos \varphi + h \sin \varphi = \frac{l^2 - a^2 - b^2 - h^2}{2a} \quad \text{KIN-07-1.2} \quad (2)$$

To je tvar úplné rovnice trigonometrická typu

$$A \cos x + B \sin x = C, \quad C \neq 0. \quad (3)$$

Taková rovnice se řeší substitucí

$$\left. \begin{aligned} A &= m \sin \lambda \\ B &= m \cos \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

kteřá danou rovnici převede na tvar

$$m(\sin \lambda \cos x + \cos \lambda \sin x) = C$$

$$\text{resp.} \quad \sin(x + \lambda) = \frac{C}{m}$$

s řešením

$$x = \arcsin \frac{C}{m} - \lambda.$$

m a λ máme řešení soustavy (4).

Nejprve rovnice dělíme, takže

$$\frac{m \sin \lambda}{m \cos \lambda} = \tan \lambda = \frac{A}{B} \Rightarrow \lambda = \arctan \frac{A}{B}.$$

Potom obě rovnice (4) porovnáme na druhou a sečteme

$$A^2 + B^2 = m^2 (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \Rightarrow m = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$$

(znaménko + nebo - se mybere tak, aby řešení odpovídalo zadání).

Nakonec je tedy řešení rovnice (3)

$$\alpha = \arcsin \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} - \arctg \frac{A}{B}$$

V našem případě je

$$A = -b, B = h \text{ a } C = \frac{l^2 - a^2 - b^2 - h^2}{2a},$$

takže

$$\varphi = \arcsin \frac{l^2 - a^2 - b^2 - h^2}{\pm 2a \sqrt{b^2 + h^2}} - \arctg \frac{-b}{h} \quad (5)$$

Druhý člen je

$$+ \arctg \frac{b}{h} \quad |$$

KIN-07-13

což je úhel BLG, který je rozhodně větší než úhel φ v zadávaném obřádku. Proto musí být 1. člen v (5) záporný; protože čísel v argumentu arcsinu je záporná hodnota, musí jmenovatel být kladný, tedy my b'rdme znaménko +. Výsledek pro φ je tedy

$$\varphi(t) = \arcsin \frac{l(t)^2 - a^2 - b^2 - h^2}{2a \sqrt{b^2 + h^2}} + \arctg \frac{b}{h}. \quad (6)$$

Úhlová rychlost ω je podle definice

$$\omega = \dot{\varphi}.$$

Protože by bylo pracně derivovat (6), použijeme implicitní derivaci (2) s přihlednutím k tomu, že a, b, h jsou konstanty. Dostaneme

$$b \sin \varphi \dot{\varphi} + h \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{l}{a} \dot{l}, \quad (7)$$

takže

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{l}{a(b \sin \varphi + h \cos \varphi)} \dot{l}, \quad (8)$$

přičemž za $\dot{l}$ můžeme dosadit podle zadání

$$\dot{l} = \frac{4L}{T} \left(1 - 2\frac{t}{T}\right).$$

Úhlové zrychlení α je podle

definice $\alpha = \dot{\omega}$.

Opět nebudeme derivovat přímo (8) ale implicitně jednoduše vztah (7) s výsledkem

$$b \cos \varphi \ddot{\varphi}^2 + b \sin \varphi \ddot{\varphi} - h \sin \varphi \ddot{\varphi}^2 + h \cos \varphi \ddot{\varphi} = \frac{1}{a} (\dot{l}^2 + l \ddot{l}),$$

takže

$$\alpha = \ddot{\varphi} = \frac{\dot{l}^2 + l \ddot{l} - a(b \cos \varphi - h \sin \varphi) \ddot{\varphi}^2}{a(b \sin \varphi + h \cos \varphi)}$$

KIN-07-1.4

Kinematické vztahy bodu C

V GSS: Použijeme transformační matici pro bod C

$$\mathbf{r}_C^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_C^L \quad (9)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} x_C^G \\ y_C^G \\ z_C^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

z toho složky polohového vektoru v GSS

$$x_C^G = c \cos \varphi - d \sin \varphi$$

$$y_C^G = h + c \sin \varphi + d \cos \varphi$$

$$z_C^G = 0.$$

Vektor rychlosti v GSS dostaneme derivací (9). Protože $\mathbf{r}_L^G$ a $\mathbf{r}_C^L$ jsou konstantní, platí

$$\mathbf{v}_C^G = \dot{\mathbf{r}}_C^G = \dot{\mathbf{T}}^{GL} \mathbf{r}_C^L. \quad (10)$$

Derivace matice je matice derivovaných úhlů. Neboli

$$\begin{bmatrix} v_{cx}^G \\ v_{cy}^G \\ v_{cz}^G \end{bmatrix} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z toho složky vektoru rychlosti v GSS

$$\left. \begin{aligned} v_{cx}^G &= -(c\sin\varphi + d\cos\varphi)\dot{\varphi} \\ v_{cy}^G &= (c\cos\varphi - d\sin\varphi)\dot{\varphi} \\ v_{cz}^G &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

Vektor zrychlení v GSS dostaneme
dalším derivováním (10). Dostaneme

$$a_C^G = \dot{v}_C^G = \ddot{\varphi}^G \Pi_C^L.$$

Druhá derivace $\ddot{\varphi}^G$ transformovat můžeme
se skládá ze dvou členů

$$\ddot{\varphi}^G = \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po vynásobení vektorem Π_C^L zprava

KIN-07-1.5

máme složky vektoru zrychlení v GSS

$$a_{cx}^G = -(c\sin\varphi + d\cos\varphi)\ddot{\varphi} - (c\cos\varphi - d\sin\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$a_{cy}^G = (c\cos\varphi - d\sin\varphi)\ddot{\varphi} - (c\sin\varphi + d\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

$$a_{cz}^G = 0.$$

(Ke stejnému výsledku bychom samozřejmě
dostali i přímým derivováním rovnice (11)).

V LSS je polohový vektor bodu C
zadan

$$r_C^L = \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro určení vektoru rychlosti použijeme
výsledek z předchozí

$$v_C^L = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$v_{cx}^L = -d\dot{\varphi}, \quad v_{cy}^L = c\dot{\varphi}, \quad v_{cz}^L = 0.$$

Podobně výsledky zprůběžky pro
vektor zrychlení v LSS dávají

$$\mathbf{a}_C^L = \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$a_{Cx}^L = -d\ddot{\varphi} - c\dot{\varphi}^2$$

$$a_{Cy}^L = c\ddot{\varphi} - d\dot{\varphi}^2$$

$$a_{Cz}^L = 0.$$

Nakonec vypočteme absolutní hodnoty
(velikosti) vektorů rychlosti a
zrychlení. Ty jsou stejné bez
ohledu na použitý SS; použijeme
proto lokální, protože složky zde
vycházejí jednodušeji.

Je tedy

$$v_C = \sqrt{v_C^L \cdot v_C^L} = \sqrt{d^2 + c^2} \dot{\varphi}$$

a

$$\begin{aligned} a_C &= \sqrt{a_C^L \cdot a_C^L} = \sqrt{(d\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi}^2)^2 + (c\ddot{\varphi} - d\dot{\varphi}^2)^2} = \\ &= \sqrt{(c^2 + d^2)\ddot{\varphi}^2 + 2dc\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2 - 2dc\ddot{\varphi}\dot{\varphi}^2 + (c^2 + d^2)\dot{\varphi}^4} = \\ &= \sqrt{(c^2 + d^2)(\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4)}. \end{aligned}$$