

Příklad 7.2 Volný obecný rovinný pohyb. Pro polohový vektor referenčního bodu L je dána x -ová globální souřadnice jako funkce

$$x_L^G(t) = X_0 \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

a y -ová globální složka vektoru rychlosti jako funkce

$$v_{y_L}^G(t) = 4 \frac{Y_0}{T} \left(1 - 2 \frac{t}{T}\right).$$

Pro relativní rotaci okolo referenčního bodu je dáno úhlové zrychlení jako funkce

$$\alpha(t) = C \frac{t}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Dále jsou dány konstanty X_0, Y_0, C, T a počáteční podmínky

$$y_L^G(0) = 0$$

$$\omega(0) = \omega_0, \varphi(0) = 0.$$

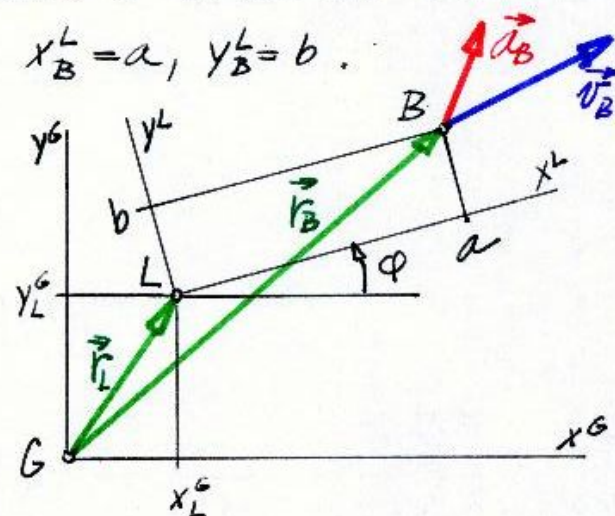
KIN-07-2.1

Určete

- trajektorii $r_B^G(t)$,
- vektor rychlosti $v_B^G(t)$
- vektor zrychlení $a_B^G(t)$

bodu o lokálních souřadnicích

$$x_B^L = a, y_B^L = b.$$



Trajektorie bodu B. Pro určení trajektorie libovolného bodu umísťme zvit složky polohového vektoru referenčního bodu L a polohový úhel relativní rotace, vše jako funkce ujetého

parametru. V daném případě může
být parametrem hodnota $\tau = \frac{t}{T}$.

xová souřadnice je zadána přímo
jako funkce parametru

$$x_L^G(\tau) = Y_0 \sin(\pi\tau).$$

Pro y-ovou souřadnici je zadána
rychlost, tj. derivace podle času. Platí

$$v_{Ly}^G = \frac{dy_L^G}{dt} = \frac{dy_L^G}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{dy_L^G}{d\tau}.$$

takže pro určení $y_L^G(\tau)$ máme dif.
rovnici

$$\frac{dy_L^G}{d\tau} = 4Y_0(1-2\tau).$$

Řešíme separací

$$dy_L^G = 4Y_0(1-2\tau)d\tau$$

a integrujeme s korespondujícími

KIN-07-2.2

určení $y_L^G(\tau)$

$$\int_0^{\tau} dy_L^G = 4Y_0 \int_0^{\tau} (1-2\tau)d\tau.$$

Výsledek

$$y_L^G(\tau) = 4Y_0\tau(1-\tau).$$

Pro relativní rotaci je dáno $\alpha = \dot{\omega}$.

Platí tedy

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\omega}{d\tau},$$

takže

$$\frac{d\omega}{d\tau} = CT\tau e^{-\tau},$$

$$d\omega = CT\tau e^{-\tau}d\tau$$

a

$$\int_{\omega_0}^{\omega(\tau)} d\omega = CT \int_0^{\tau} \tau e^{-\tau} d\tau.$$

Integrál na pravé straně se
řeší metodou per partes.

Zvolíme-li $u = \tau$ a $v = e^{-\tau}$

bude $u' = 1$ a $v = -\bar{e}^\tau$, takže

$$\int \tau \bar{e}^\tau d\tau = -\tau \bar{e}^\tau + \int \bar{e}^\tau d\tau$$

neboli rovnice

$$\int \tau \bar{e}^\tau d\tau = -\bar{e}^\tau (1+\tau).$$

Při použití v dosudních vztazích tak je

$$\omega(\tau) = \omega_0 + CT \left[-\bar{e}^\tau (1+\tau) \right]_0^\tau,$$

$$\omega(\tau) = \omega_0 + CT \left[1 - \bar{e}^\tau (1+\tau) \right]. \quad (1)$$

Dále je $\omega = \dot{\varphi}$. Platí tedy

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\varphi}{d\tau},$$

takže separací

$$d\varphi = T\omega_0 d\tau + CT^2 \left[1 - \bar{e}^\tau (1+\tau) \right] d\tau$$

a integrací

KIN-07-2.3

$$\int_0^{\varphi(\tau)} d\varphi = T\omega_0 \int_0^\tau d\tau + CT^2 \int_0^\tau \left[1 - \bar{e}^\tau (1+\tau) \right] d\tau$$

dostáváme

$$\varphi(\tau) = \omega_0 T\tau + CT^2 \left[\tau - 2 + (\tau+2)\bar{e}^\tau \right]. \quad (2)$$

Parametrická rovnice trajektorie
je pak

$$\mathbf{r}_B^G(\tau) = \mathbf{r}_L^G(\tau) + \mathbf{T}^{GL}(\tau) \mathbf{r}_B^L \quad (3)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} x_B^G(\tau) \\ y_B^G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L^G(\tau) \\ y_L^G(\tau) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi(\tau) & -\sin\varphi(\tau) & 0 \\ \sin\varphi(\tau) & \cos\varphi(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vektor rychlosti bodu B. v GSS

dostaneme derivováním (3) podle času. Protože je ale

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d}{d\tau}, \quad (4)$$

je

$$\mathbf{v}_B^G = \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{r}_L^G}{d\tau} + \frac{1}{T} \frac{d\mathbf{T}^{GL}}{d\tau} \mathbf{r}_B^L. \quad (5)$$

V našem případě je

$$\frac{d\mathbf{r}_L^G}{d\tau} = \begin{bmatrix} \pi X_0 \cos(\pi\tau) \\ 4Y_0(1-2\tau) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{T}^{GL}}{d\tau} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T\omega$$

přičemž $\varphi = \varphi(\tau)$ podle (2) a $\omega = \omega(\tau)$ podle (1).

Vektor zrychlení bodu B v GSS dostaneme derivováním (5) podle času s přihlednutím k (4). Pak

KIN-07-2.4

$$\mathbf{a}_B^G = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\mathbf{r}_L^G}{d\tau^2} + \frac{1}{T^2} \frac{d^2\mathbf{T}^{GL}}{d\tau^2} \mathbf{r}_B^L.$$

V daném případě je

$$\frac{d^2\mathbf{r}_L^G}{d\tau^2} = \begin{bmatrix} -\pi^2 X_0 \sin(\pi\tau) \\ -8Y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{T}^{GL}}{d\tau^2} &= \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^2\omega^2 + \\ &+ \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T^2\alpha. \end{aligned}$$