

Příklad 8.1. Obálka výtvorné křivky při obecném rovinném pohybu (ORP).

Dáno:

- konstanty $X_0, Y_0, T, \omega_0, r, d$;

- pohyb referenčního bodu L

$$x_L^G(t) = X_0 \frac{t}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$y_L^G(t) = Y_0 \left[1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)\right];$$

- úhlová rychlost rotace okolo referenčního bodu

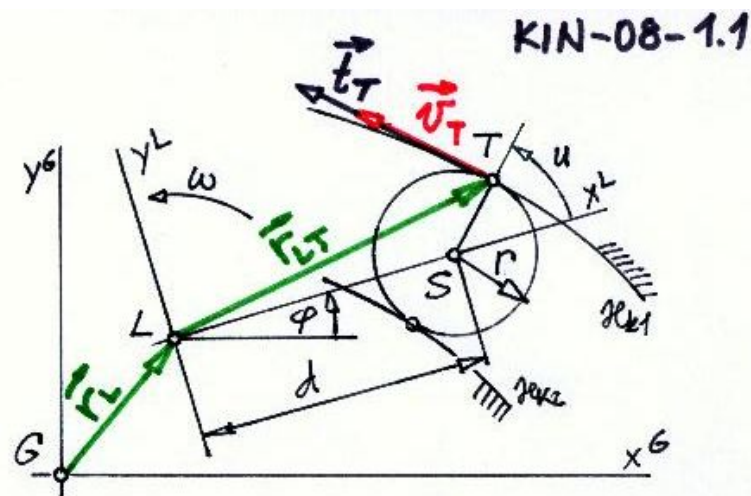
$$\omega = \omega_0 = \text{konst};$$

- počáteční podmínka pro φ

$$\varphi(0) = 0;$$

- výtvorná křivka k , která je kružnicí o poloměru r se středem S v bodě $x_S^L = d, y_S^L = 0$.

Určit: Obálky $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ výtvorné křivky k .



Řešení: Obálkou $\mathcal{K}_k$ výtvorné křivky k je množina výtvorných bodů T, kterými jsou body výtvorné křivky, jejichž okamžitá rychlost je tečnou k výtvorné křivce. Tuto podmínku lze vektorově vyjádřit jako

$$\vec{v}_T = c \vec{t}_T,$$

kde c je nějaká skalární hodnota.

Použít můžeme vyjádření vektorů buď v lokálních nebo globálních složkách.

Použijeme lokální, takže

$$v_T^L = c t_T^L. \quad (1)$$

Pro výpočet v_T^L vyjdeme z transformační rovnice pro ORP ve tvaru

$$r_T^G = r_L^G + T^{GL} r_T^L.$$

Rychlost bodu T vyjádřená v GSS je

$$v_T^G = \dot{r}_T^G = \dot{r}_L^G + \dot{T}^{GL} r_T^L.$$

V LSS pak bude

$$v_T^L = (T^{GL})^T v_T^G,$$

neboli

$$v_T^L = (T^{GL})^T \dot{r}_L^G + (T^{GL})^T \dot{T}^{GL} r_T^L.$$

Tím jsme měli vektor na levé straně rovnice (1). Pro měření vektoru $\dot{r}_T^L$ na pravé straně předpokládáme, že křivka k je

KIN-08-1.2

zadána parametricky s parametrem u .

Potom tečný vektor

$$\dot{r}_T^L = \frac{dr_T^L}{du}.$$

Dosažením do rovnice (1) dává

$$(T^{GL})^T \dot{r}_L^G + (T^{GL})^T \dot{T}^{GL} r_T^L = c \frac{dr_T^L}{du}. \quad (2)$$

Podle zadání je

$$r_L^G = \begin{bmatrix} X_0 \frac{t}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ Y_0 \left[1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right)\right] \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{r}_L^G = \begin{bmatrix} \frac{X_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \\ \pi \frac{Y_0}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

a v parametrickém vyjádření

pro kružnici k

$$\mathbf{r}_T^L = \begin{bmatrix} d + r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\mathbf{r}_T^L}{du} = \begin{bmatrix} -r \sin u \\ r \cos u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Úhel φ můžeme integrovat ze
zadané konstantní úhlové rychlosti
 $\omega = \omega_0$ a počáteční podmínky $\varphi(0) = 0$:

$$\int_0^{\varphi(t)} d\varphi = \int_0^t \omega dt = \omega_0 \int_0^t dt,$$

neboli

$$\varphi = \omega_0 t.$$

Výraz pro $(\mathbf{T}^{6L})^T \dot{\mathbf{T}}^{6L}$ jsme dříve
odvodili ve tvaru

$$(\mathbf{T}^{6L})^T \dot{\mathbf{T}}^{6L} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

takže dosadíme do (2) dle **KIN-08-1.3**

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{X_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \\ \pi \frac{Y_0}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \omega_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d + r \cos u \\ r \sin u \\ 0 \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} -r \sin u \\ r \cos u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tato vektorová rovnice představuje 2
rovnice skalární (třetí je $0=0$).

První je po úpravě

$$\frac{X_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \cos(\omega_0 t) +$$

$$+ \pi \frac{Y_0}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \sin(\omega_0 t) = r(\omega_0 - c) \sin u$$

a druhé

$$\frac{X_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \sin(\omega_0 t) -$$

$$- \pi \frac{Y_0}{T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) \cos(\omega_0 t) - \omega_0 d = r(\omega_0 - c) \cos u,$$

Tyto dvě rovnice obsahují dvě neznámé:
 u, c . Hodnota c není zájmem;
 vypočteme u dělením obou rovnic
 s následkem

$$\frac{\sin u}{\cos u} = \frac{\frac{x_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \cos(\omega_0 t) + \dots}{\frac{x_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \sin(\omega_0 t) - \dots}$$

takže nakonec

$$u^* = \arctg \frac{\frac{x_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \cos(\omega_0 t) + \dots}{\frac{x_0}{T} \left[\sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) + \pi \frac{t}{T} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right] \sin(\omega_0 t) - \dots}$$

Označení u^* použijeme proto, že u nás
 máme ve skutečnosti dvě řešení

$$u_1 = u^*, \quad u_2 = u^* + \pi$$

jak vyplývá z vlastností funkce tg.

Protože je evidentně $u_1 = u_1(t)$ i
 $u_2 = u_2(t)$, máme nakonec dvě
 parametrické rovnice s parametrem

KIN-08-1.4

t pro určení obláček

$$\mathcal{R}_{k1}: \mathbf{r}_T^C(t) = \mathbf{r}_L^C(t) + \mathbf{T}^{CL}(t) \mathbf{r}_T^L[u_1(t)] \quad a$$

$$\mathcal{R}_{k2}: \mathbf{r}_T^C(t) = \mathbf{r}_L^C(t) + \mathbf{T}^{CL}(t) \mathbf{r}_T^L[u_2(t)],$$

kteřé se liší jen členy

$$\mathbf{r}_T^L[u_1(t)] = \begin{bmatrix} d + r \cos[u_1(t)] \\ r \sin[u_1(t)] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + r \cos u^* \\ r \sin u^* \\ 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{r}_T^L[u_2(t)] = \begin{bmatrix} d + r \cos[u_2(t)] \\ r \sin[u_2(t)] \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d - r \cos u^* \\ r \sin u^* \\ 0 \end{bmatrix}$$