

Příklad 8.2. ORP s 1° volností:

Rovinné těleso
reprezentované
lokálními SS
(L, x^L, y^L) je
podrobena
dvěma obecným
vztahům:

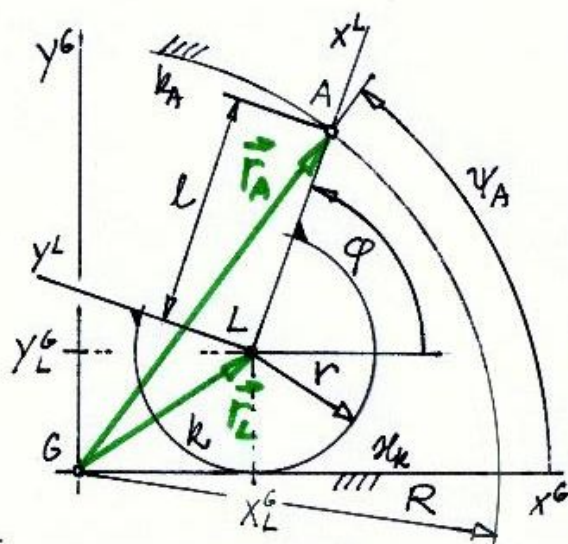
bod A tělesa

sleduje před-

epsanou trajektorii k_A a křivka k tělesa
vytváří předepsanou obálku γ_k . Pohyb
je zadán rychlostí $\vec{v}_A$ pohybu bodu A
po kružnici k_A .

Dáno: - konstanty l, r, R, v_{A0} ;

- lokální souřadnice bodu A: $x_A^L = l, y_A^L = 0$;
- trajektorie k_A : kružnice o poloměru R , se středem v G ;
- křivka k : kružnice o poloměru r se středem L ;
- obálka γ_k : přímka $y_G^L = 0$;



KIN-08-2.1

- rychlost bodu A na k_A : $v_A = v_{A0} = \text{konst.}$;
- počáteční podmínka pro polohu A na k_A : $\psi_A(0) = 0$.

Určit:

- kinematické veličiny $\vec{r}_L, \vec{v}_L, \vec{a}_L$ referenčního brdu L ;
- kinematické veličiny φ, ω, α relativní rotace okolo L .

Řešení:

Transformační rovnice ORP psané pro
brd A je

$$\vec{r}_A^G = \vec{r}_L^G + \mathbb{T}^{GL} \vec{r}_A^L. \quad (1)$$

Podle zadání je

$$\vec{r}_A^L = \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a předepsané vztahy znamenají, že

$$\vec{r}_A^G = \begin{bmatrix} R \cos \psi_A \\ R \sin \psi_A \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_L^G = \begin{bmatrix} x_L^G \\ r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Transformační matice pro ORP je

$$T^{GL} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dosažením do (1) dostáváme

$$\begin{bmatrix} R\cos\psi_A \\ R\sin\psi_A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_L^G \\ r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Provedením neznačených operací dostaneme dvě skalární rovnice

$$\left. \begin{aligned} R\cos\psi_A &= x_L^G + l\cos\varphi \\ R\sin\psi_A &= r + l\sin\varphi. \end{aligned} \right\} (2)$$

Hodnotu ψ_A můžeme mít pro každý časť, protože je dáno

$$\text{konst.} = v_{A0} = v_A = \frac{ds_A}{dt} = R \frac{d\psi_A}{dt},$$

$$\text{takže} \quad \int_0^{\psi_A(t)} d\psi_A = \frac{v_{A0}}{R} \int_0^t dt$$

KIN-08-2.2

s výsledkem

$$\psi_A = \frac{v_{A0}}{R} t. \quad (3)$$

V soustavě (2) je tedy ψ_A parametr a dvě neznámé jsou x_L^G a φ .

Řešení pro x_L^G dostaneme, když otčemy s neznámou φ osamostatujeme na jednu stranu rovnice

$$R\cos\psi_A - x_L^G = l\cos\varphi$$

$$R\sin\psi_A - r = l\sin\varphi,$$

obě rovnice umocníme a sečteme

$$\begin{aligned} R^2\cos^2\psi_A - 2Rx_L^G\cos\psi_A + (x_L^G)^2 + \\ + R^2\sin^2\psi_A - 2Rr\sin\psi_A + r^2 = l^2. \end{aligned}$$

Upravíme na tvar

$$(x_L^G)^2 - (2R\cos\psi_A)x_L^G + R^2 - 2Rr\sin\psi_A + r^2 - l^2 = 0,$$

což je standardní kvadratická rovnice s řešením

$$(x_L^G)_{1,2} = R\cos\psi_A \pm \sqrt{R^2\cos^2\psi_A - R^2 + 2Rr\sin\psi_A - r^2 + l^2}$$

neboli po úpravě

$$(x_L^G)_{12} = R \cos \psi_A \pm \sqrt{l^2 - (R \sin \psi_A - r)^2}.$$

Pro situaci podle zadávajícího obrázku platí záporné znaménko, takže nakonec

$$x_L^G = R \cos \psi_A - \sqrt{l^2 - (R \sin \psi_A - r)^2}.$$

Řešení pro úhel φ dostaneme jednoduše ze druhé rovnice soustavy (2)

$$\varphi = \arcsin \frac{R \sin \psi_A - r}{l}.$$

Rychlosti $\vec{v}_L$ a ω . Globální vektor rychlosti bodu L je

$$\vec{v}_L^G = \dot{\vec{r}}_L^G = \begin{bmatrix} \dot{x}_L^G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a $\omega = \dot{\varphi}$. Obě funkce $\dot{x}_L^G$ a $\dot{\varphi}$ určíme v jednom kroku implicitně

derivátům soustavy (2). **KN-08-2.3**
Dostaneme

$$\dot{x}_L^G - l \sin \varphi \dot{\varphi} = -R \sin \psi_A \dot{\psi}_A$$

$$l \cos \varphi \dot{\varphi} = R \cos \psi_A \dot{\psi}_A,$$

v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} 1 & -l \sin \varphi \\ 0 & l \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_L^G \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = R \dot{\psi}_A \begin{bmatrix} -\sin \psi_A \\ \cos \psi_A \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Řešení, např. Cramerovým pravidlem

$$\dot{x}_L^G = \frac{\begin{vmatrix} -\sin \psi_A & -\sin \varphi \\ \cos \psi_A & \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -l \sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{vmatrix}} R \dot{\psi}_A = \frac{\sin(\varphi - \psi_A)}{\cos \varphi} R \dot{\psi}_A$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\sin \psi_A \\ 0 & \cos \psi_A \end{vmatrix}}{\cos \varphi} \frac{R}{l} \dot{\psi}_A = \frac{\cos \psi_A}{\cos \varphi} \frac{R}{l} \dot{\psi}_A$$

Přičemž podle (3) je $\dot{\psi}_A = \frac{v_{A0}}{R} = \text{konst.}$ (5)

Zrychlení $\vec{a}_L + \alpha$. Globální vektor
zrychlení bodu L je

$$\vec{a}_L^G = \dot{\vec{v}}_L^G = \begin{bmatrix} \ddot{x}_L^G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a $\alpha = \ddot{\varphi}$. Implicitně derivovat budeme
soustavu (4) v maticovém zápisu. Dostaneme

$$\begin{bmatrix} 0 & -l \cos \varphi \dot{\varphi} \\ 0 & -l \sin \varphi \dot{\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_G^L \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -l \sin \varphi \\ 0 & l \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_G^L \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} =$$

$$= R \ddot{\psi}_A \begin{bmatrix} -\sin \psi_A \\ \cos \psi_A \end{bmatrix} - R \dot{\psi}_A^2 \begin{bmatrix} \cos \psi_A \\ \sin \psi_A \end{bmatrix}.$$

Po úpravě

$$\begin{bmatrix} 1 & -l \sin \varphi \\ 0 & l \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_G^L \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - R \sin \psi_A \ddot{\psi}_A - R \cos \psi_A \dot{\psi}_A^2 \\ l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + R \cos \psi_A \ddot{\psi}_A - R \sin \psi_A \dot{\psi}_A^2 \end{bmatrix}$$

Podle (5) je

$$\ddot{\psi}_A = 0,$$

KIN-08-2.4

takže příslušné členy v prvcích vektoru
pravých stran můžeme vypustit.

Řešení opět Cramerovým pravidlem dává

$$\ddot{x}_L^G = \frac{\begin{vmatrix} l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - R \cos \psi_A \dot{\psi}_A^2 & -l \sin \varphi \\ l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - R \sin \psi_A \dot{\psi}_A^2 & l \cos \varphi \end{vmatrix}}{l \cos \varphi} =$$

$$= \frac{l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - R l \cos \varphi \cos \psi_A \dot{\psi}_A^2 + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - R l \sin \varphi \sin \psi_A \dot{\psi}_A^2}{l \cos \varphi} =$$

$$= \frac{l^2 \dot{\varphi}^2 - R l \cos(\varphi - \psi_A) \dot{\psi}_A^2}{l \cos \varphi},$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & l \cos \varphi \dot{\varphi}^2 - R \cos \psi_A \dot{\psi}_A^2 \\ 0 & l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - R \sin \psi_A \dot{\psi}_A^2 \end{vmatrix}}{l \cos \varphi} =$$

$$= \frac{l \sin \varphi \dot{\varphi}^2 - R \sin \psi_A \dot{\psi}_A^2}{l \cos \varphi}.$$