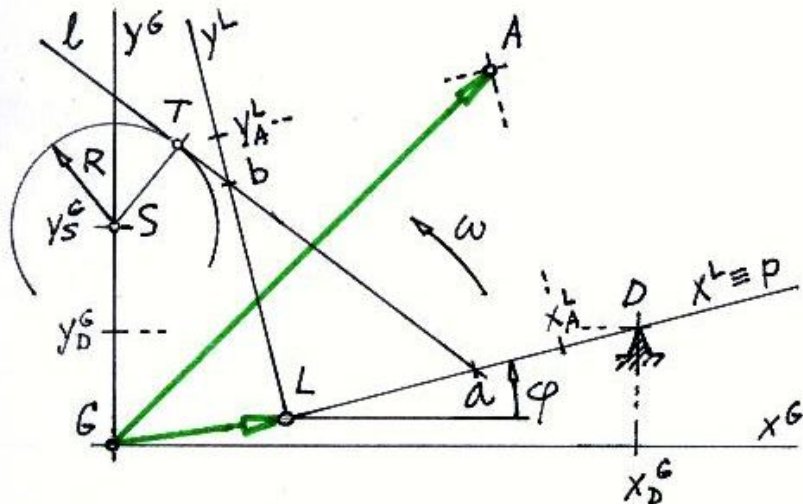


Příklad 9.1. ORP s 10 volnostmi.



Rovinnému tělesu, reprezentovanému lokálním SS (L, x^L, y^L), jsou předepsány dvě obecné vazby: přímka p tělesa je vázána na bod D zák. rámu (tj. bod D je degenerovanou obálkou přímky p , $D \equiv \mathcal{H}_p$) a přímka l tělesa je vázána na kružnici c zák. rámu (tj. kružnice c je obálkou přímky l , $c \equiv \mathcal{H}_l$).

KIN-09-1.1

Dáno: - konstanty $a, b, y_S^G, x_D^G, y_D^G, x_A^L, y_A^L, T, R$;

- přímka p : $y^L = 0$;

- přímka l : $\frac{x^L}{a} + \frac{y^L}{b} = 1$;

- kružnice c : $(x^G)^2 + (y^G - y_S^G)^2 = R^2$;

- bod D souřadnicemi x_D^G, y_D^G ;

- bod A souřadnicemi x_A^L, y_A^L ;

- úhlová rychlost ORP tělesa

$$\omega = \frac{\pi^2}{4T} \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right); \quad (1)$$

- počáteční podmínka pro úhel φ
 $\varphi(0) = 0$;

Určit:

- kinematiku referenčního bodu: $\vec{r}_L, \vec{v}_L, \vec{a}_L$;

- kinematiku relativní rotace: φ, ω, α ;

- kinematiku obecného bodu: $\vec{r}_A, \vec{v}_A, \vec{a}_A$;

Řešení: Protože je zadána úhlová rychlost, můžeme začít řešením

kinematiky relativní rotace. Podle definice je

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

takže po dosazení za ω a separaci proměnných máme s přihlednutím k dané počáteční podmínce

$$\int_0^{\varphi(t)} d\varphi = \frac{\pi^2}{4T} \int_0^t \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right) dt.$$

Výsledkem integrace je

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{4} \left[1 - \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right) \right]. \quad (2)$$

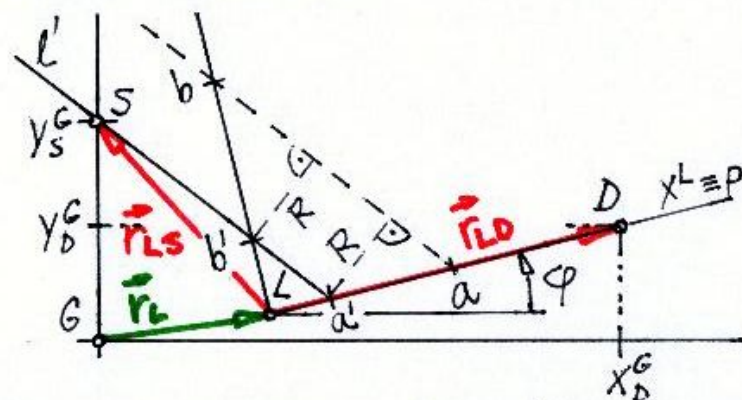
Úhlové zrychlení je podle definice

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\pi^3}{4T^2} \cos\left(\pi \frac{t}{T}\right). \quad (3)$$

K řešení kinematiky referenčního bodu vezmeme v úvahu dané vazby.

Při aplikaci vazby mezi měřnou přímkou l a obálkou $se \equiv c$ využí-

jeme faktu, že přímka l' rovnoběžná s l ve vzdálenosti R vždy prochází středem S dané kružnice c .



Tím se vazba typu přímka/křivka mezi l a c změnila ve vazbu typu přímka/bod mezi l' a S .

Úseky a' , b' pro přímku l' vypočteme z podobnosti trojúhelníků

$$\frac{a-a'}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{R}{b} \Rightarrow a' = a - \frac{R}{b} \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\frac{b-b'}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{R}{a} \Rightarrow b' = b - \frac{R}{a} \sqrt{a^2+b^2}.$$

Pak l' : $\frac{x^L}{a'} + \frac{y^L}{b'} = 1.$

Pro body D a S nyní platí transformační rovnice

$$\mathbf{r}_D^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_D^L \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_S^G = \mathbf{r}_L^G + \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_S^L \quad (5)$$

Globální vektory $\mathbf{r}_D^G$ a $\mathbf{r}_S^G$ mají zadane konstantní složky

$$\mathbf{r}_D^G = \begin{bmatrix} x_D^G \\ y_D^G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_S^G = \begin{bmatrix} 0 \\ y_S^G \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pro lokální vektory kontaktních bodů D a S platí z rovnice přímek p a l'

$$\mathbf{r}_D^L = \begin{bmatrix} x_D^L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_S^L = \begin{bmatrix} x_S^L \\ b'(1 - \frac{x_S^L}{a'}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

přímce x_D^L a x_S^L jsou proměnné. Odečtením rovnice (5) od rovnice (4)

KIN-09-1.3

vyloučíme neznámý vektor $\mathbf{r}_L^G$. Dostaneme

$$\mathbf{r}_D^G - \mathbf{r}_S^G = \mathbf{T}^{GL} (\mathbf{r}_D^L - \mathbf{r}_S^L).$$

Protože neznáme x_D^L i x_S^L se nacházejí na pravé straně, násobíme rovnici $(\mathbf{T}^{GL})^T$ zleva s výsledkem

$$(\mathbf{T}^{GL})^T (\mathbf{r}_D^G - \mathbf{r}_S^G) = \mathbf{r}_D^L - \mathbf{r}_S^L.$$

Dosadíme za jednotlivé členy

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D^G \\ y_D^G - y_S^G \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D^L - x_S^L \\ -b'(1 - \frac{x_S^L}{a'}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

a zapíšeme jednotlivé skalární rovnice

$$x_D^L - x_S^L = x_D^G \cos\varphi + (y_D^G - y_S^G) \sin\varphi$$

$$-b'(1 - \frac{x_S^L}{a'}) = -x_D^G \sin\varphi + (y_D^G - y_S^G) \cos\varphi.$$

Za druhé počítáme

$$x_S^L = \frac{a'}{b'} \left[b' - x_D^G \sin\varphi + (y_D^G - y_S^G) \cos\varphi \right] \quad (6)$$

a z první

$$x_D^L = x_S^L + x_D^C \cos \varphi + (y_D^C - y_S^C) \sin \varphi,$$

takže

$$x_D^L = a' + x_D^C \left(\cos \varphi - \frac{a'}{b'} \sin \varphi \right) + (y_D^C - y_S^C) \left(\sin \varphi + \frac{a'}{b'} \cos \varphi \right)$$

resp.

$$x_D^L = a' + \left[x_D^C + (y_D^C - y_S^C) \frac{a'}{b'} \right] \cos \varphi + \left[-\frac{a'}{b'} x_D^C + (y_D^C - y_S^C) \right] \sin \varphi. \quad (7)$$

Tedy již můžeme počítat r_L^C , nepří-
z rovnice (4)

$$r_L^C = r_D^C - \vec{r}^{GL} r_D^L, \quad (8)$$

neboli

$$\begin{bmatrix} x_L^C \\ y_L^C \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_D^C \\ y_D^C \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos \varphi - \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D^L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z toho

$$x_L^C = x_D^C - x_D^L \cos \varphi$$

KIN-09-1.4

$$y_L^C = y_D^C - x_D^L \sin \varphi,$$

kam za x_D^L a φ dosazujeme z (7) a (2).

Rychlost referenčního bodu dostaneme
derivováním rovnice (8). Protože r_D^C
je konstantní vektor a r_D^L proměnný
vektor, bude vektor

$$v_L^C = \dot{r}_L^C = -\dot{\vec{r}}^{GL} r_D^L - \vec{r}^{GL} \dot{r}_D^L \quad (9)$$

se složkami

$$v_{Lx}^C = x_D^L \omega \sin \varphi - \dot{x}_D^L \cos \varphi$$

$$v_{Ly}^C = -x_D^L \omega \cos \varphi - \dot{x}_D^L \sin \varphi,$$

přičemž ze (7)

$$\dot{x}_D^L = -\omega \left[x_D^C + (y_D^C - y_S^C) \frac{a'}{b'} \right] \sin \varphi + \omega \left[-\frac{a'}{b'} x_D^C + (y_D^C - y_S^C) \right] \cos \varphi. \quad (10)$$

Zrychlení referenčního bodu dostaneme
derivováním rovnice (9).

$$a_L^C = \dot{V}_L^C = -\ddot{T}^{GL} r_D^L - 2\dot{T}^{GL} \dot{r}_D^L - \dot{T}^{GL} \ddot{r}_D^L$$

se složí

$$a_{Lx}^C = x_D^L (\omega^2 \cos \varphi + \alpha \sin \varphi) + 2\dot{x}_D^L \omega \sin \varphi - \ddot{x}_D^L \cos \varphi$$

$$a_{Ly}^C = x_D^L (\omega^2 \sin \varphi - \alpha \cos \varphi) - 2\dot{x}_D^L \omega \cos \varphi - \ddot{x}_D^L \sin \varphi$$

přičemž z (10)

$$\ddot{x}_D^L = - \left[x_D^C + (y_D^C - y_S^C) \frac{a'}{b'} \right] (\omega^2 \cos \varphi + \alpha \sin \varphi) - \left[-\frac{a'}{b'} x_D^C + y_D^C - y_S^C \right] (\omega^2 \sin \varphi - \alpha \cos \varphi).$$

Kinematika bodu A už jednoduše

$$r_A^C = r_L^C + T^{GL} r_A^L, \quad r_A^L = \begin{bmatrix} x_A^L \\ y_A^L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_A^C = V_L^C + \dot{T}^{GL} r_A^L,$$

$$a_A^C = a_L^C + \ddot{T}^{GL} r_A^L.$$