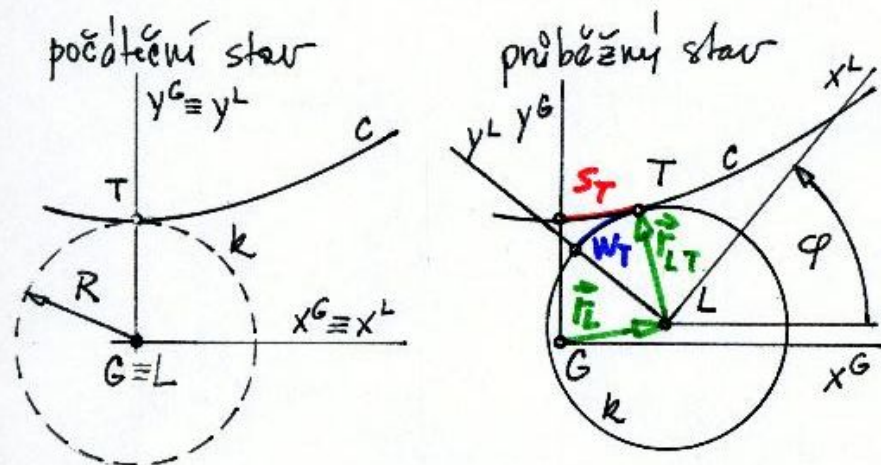


Příklad 9.2. Valivý pohyb.

Rovinné těleso reprezentované lokálním SS (L, x^L, y^L) je podrobena valivě vazbě mezi kružnicí k tělesa a křivkou c základního rámce. Pohyb tělesa je zadán tak, že dotykový bod T mezi k a c se pohybuje po c konstantní rychlostí.



- Dáno: - konstanty R, v_T ;
 - kružnice k : $(x^L)^2 + (y^L)^2 = R^2$;
 - křivka c : $y^G = R \cosh \frac{x^G}{R}$;
 - rychlost pohybu dotykového bodu: v_T ;
- (1)

Určit:

KIN-09-2.1

- kinematiku referenčního bodu L : $\vec{r}_L, \vec{v}_L, \vec{a}_L$;
- kinematiku relativní rotace: φ, ω, α ;

Řešení: Transformační rovnice pro bod T

$$\Pi_T^G = \Pi_L^G + \mathbb{T}^{GL} \Pi_T^L \quad (2)$$

platí současně s podmínkou společné tečny k a c v bodě T

$$\Pi_c^G = h \mathbb{T}^{GL} \Pi_k^L \quad (3)$$

a s podmínkou rovnosti délky odvalených oblouků

$$s_T = w_T. \quad (4)$$

Vypočteme nejprve s_T pro danou polohu bodu na c . Platí obecně

$$ds = \sqrt{(dx^G)^2 + (dy^G)^2}$$

neboli

$$ds = dx^G \sqrt{1 + \left(\frac{dy^G}{dx^G}\right)^2}, \quad s = \int_0^{x^G} \sqrt{1 + \left(\frac{dy^G}{dx^G}\right)^2} dx^G.$$

V našem případě je

$$\frac{dy^G}{dx^G} = \sinh \frac{x^G}{R}$$

takže

$$s_T = \int_0^{x_T^C} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x_T^C}{R}} dx_T^C = \int_0^{x_T^C} \cosh \frac{x_T^C}{R} dx_T^C = R \sinh \frac{x_T^C}{R} \quad (5)$$

Délku s_T budeme považovat za parametr křivky c . Diferencováním (5) a (4) určíme

$$ds_T = \cosh \frac{x_T^C}{R} dx_T^C, \quad dy_T^C = \sinh \frac{x_T^C}{R} dx_T^C,$$

takže

$$\frac{dx_T^C}{ds_T} = \frac{1}{\cosh \frac{x_T^C}{R}}, \quad \frac{dy_T^C}{ds_T} = \tanh \frac{x_T^C}{R}$$

a

$$\mathbf{t}_c^C = \frac{d\mathbf{r}_T^C}{ds_T} = \begin{bmatrix} \frac{dx_T^C}{ds_T} \\ \frac{dy_T^C}{ds_T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cosh \frac{x_T^C}{R}} \\ \tanh \frac{x_T^C}{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Za parametr kružnice k vezmeme oblouk w_T . Pak platí

KIN-09-2.2

$$x_T^L = R \sin \frac{w_T}{R}, \quad y_T^L = R \cos \frac{w_T}{R},$$

$$dx_T^L = \cos \frac{w_T}{R} dw_T, \quad dy_T^L = -\sin \frac{w_T}{R} dw_T,$$

$$\mathbf{t}_k^L = \frac{d\mathbf{r}_T^L}{dw_T} = \begin{bmatrix} \frac{dx_T^L}{dw_T} \\ \frac{dy_T^L}{dw_T} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{w_T}{R} \\ -\sin \frac{w_T}{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dosazením (6) a (7) do tečové podmínky (3) dává dvě skalární rovnice

$$\frac{1}{\cosh \frac{x_T^C}{R}} = h \left(\cos \varphi \cos \frac{w_T}{R} + \sin \varphi \sin \frac{w_T}{R} \right) = h \cos \left(\varphi - \frac{w_T}{R} \right)$$

$$\tanh \frac{x_T^C}{R} = h \left(\sin \varphi \cos \frac{w_T}{R} - \cos \varphi \sin \frac{w_T}{R} \right) = h \sin \left(\varphi - \frac{w_T}{R} \right).$$

Jich vydělením dostaneme

$$\tanh \left(\varphi - \frac{w_T}{R} \right) = \sinh \frac{x_T^C}{R}.$$

S přihlédnutím k (4) a (5) je to

$$\tanh \left(\varphi - \frac{s_T}{R} \right) = \frac{s_T}{R}, \quad (8)$$

takže

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{s_T}{R}\right) + \frac{s_T}{R}.$$

Podle zadání je

$$s_T = v_T t,$$

takže nakonec

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_T t}{R}\right) + \frac{v_T t}{R}.$$

Úhlovou rychlost valivého pohybu dostaneme implicitním derivováním (8) s výsledkem

$$\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}_T}{R} = \cos^2\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right) \frac{\dot{s}_T}{R}, \quad (9)$$

takže

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{v_T}{R} \left[1 + \cos^2\left(\varphi - \frac{v_T t}{R}\right) \right].$$

Pro určení úhlového zrychlení valivého pohybu derivujeme implicitně (9) s výsledkem

$$\ddot{\varphi} - \frac{\ddot{s}_T}{R} = 2\cos\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right)\sin\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right)\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}_T}{R}\right)\frac{\dot{s}_T}{R} + \cos^2\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right)\frac{\ddot{s}_T}{R}.$$

KIN-09-2.3

Protože je $\ddot{s}_T = 0$, je úhlové zrychlení

$$\alpha = 2\cos\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right)\sin\left(\varphi - \frac{s_T}{R}\right)\left(\omega - \frac{v_T}{R}\right)\frac{v_T}{R}.$$

Tím je určena kinematika relativní rotace. Zbývá určit kinematiku referenčního bodu.

Z rovnice (2) je

$$\mathbf{r}_L^C = \mathbf{r}_T^C - \mathbf{T}^{GL} \mathbf{r}_T^L \quad (10)$$

resp.

$$\mathbf{r}_L^C = \begin{bmatrix} x_T^C \\ R \cosh \frac{x_T^C}{R} \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{T}^{GL} \begin{bmatrix} R \sin \frac{s_T}{R} \\ R \cos \frac{s_T}{R} \\ 0 \end{bmatrix},$$

přičemž podle (5)

$$x_T^C = R \operatorname{arcsinh} \frac{s_T}{R}.$$

Rychlost referenčního bodu dostaneme derivováním (10), přičemž vezmeme v úvahu, že $\mathbf{r}_T^L$ není konstantní vektor.

Pak

$$\mathbf{v}_L^C = \dot{\mathbf{r}}_T^C - \mathbf{T}^{GL} \dot{\mathbf{r}}_T^L - \dot{\mathbf{T}}^{GL} \mathbf{r}_T^L, \quad (11)$$

príčet

$$\ddot{r}_T^G = \frac{d\dot{r}_T^G}{dt} = \frac{d\dot{r}_T^G}{ds_T} \dot{s}_T = v_T \dot{\theta}_c^G$$

a

$$\ddot{r}_T^L = \frac{d\dot{r}_T^L}{dt} = \frac{d\dot{r}_T^L}{dw_T} \dot{w}_T = v_T \dot{\theta}_k^L$$

Nakoniec zrychlenní referenčného bodu

dostaneme deriváciou (11) s výsledkom

$$\ddot{a}_L^G = \ddot{r}_T^G - \ddot{\theta}_c^G \dot{r}_T^L - \dot{\theta}_c^G \ddot{r}_T^L - \dot{\theta}_c^G \dot{r}_T^L - \dot{\theta}_c^G \ddot{r}_T^L,$$

zjednodušené

$$\ddot{a}_L^G = \ddot{r}_T^G - \ddot{\theta}_c^G \dot{r}_T^L - 2\dot{\theta}_c^G \dot{r}_T^L - \dot{\theta}_c^G \ddot{r}_T^L,$$

kde

$$\ddot{r}_T^G = v_T \frac{d\dot{\theta}_c^G}{dt} = v_T^2 \frac{d\dot{\theta}_c^G}{ds_T},$$

$$\ddot{r}_T^L = v_T \frac{d\dot{\theta}_k^L}{dt} = v_T^2 \frac{d\dot{\theta}_k^L}{dw_T},$$

príčet z (6) dostaneme

KIN-09-2.4

$$\frac{d\dot{\theta}_c^G}{ds_T} = \begin{bmatrix} -\sinh \frac{x_T^G}{R} \\ \cosh^2 \frac{x_T^G}{R} \\ 1 \\ \cosh^2 \frac{x_T^G}{R} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{dx_T^G}{ds_T} = \frac{1}{R} \frac{1}{\cosh^3 \frac{x_T^G}{R}} \begin{bmatrix} -\sinh \frac{x_T^G}{R} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a z (7)

$$\frac{d\dot{\theta}_k^L}{dw_T} = -\frac{1}{R} \begin{bmatrix} \sin \frac{w_T}{R} \\ \cos \frac{w_T}{R} \\ 0 \end{bmatrix}.$$