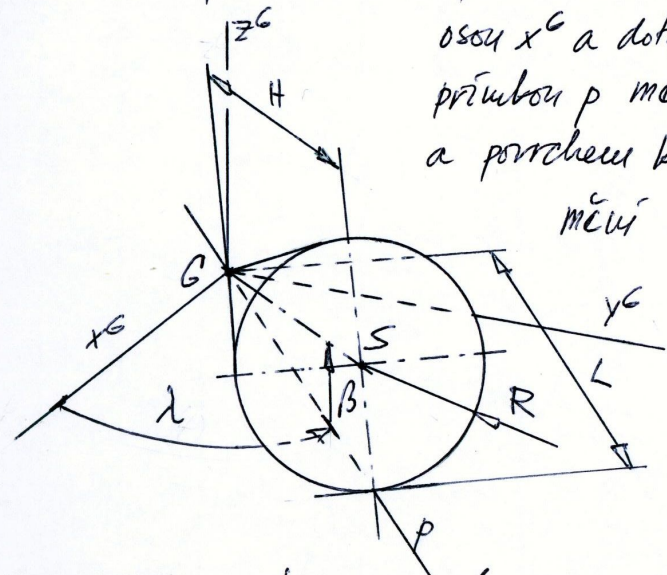


Příklad 11.1. Sférický pohyb.

Kužel výšky H s kruhovou základnou o poloměru R se valí po rovině tak, že úhel λ sevřený



osou x^G a dotykovou
přímkou p mezi rovinou
a povrchem kužele se
mění s časem

prádpsaným způsobem.

Dáno: - konstanty H, R, T ;

- závislost $\lambda(t) = \frac{2\pi}{T}t$;

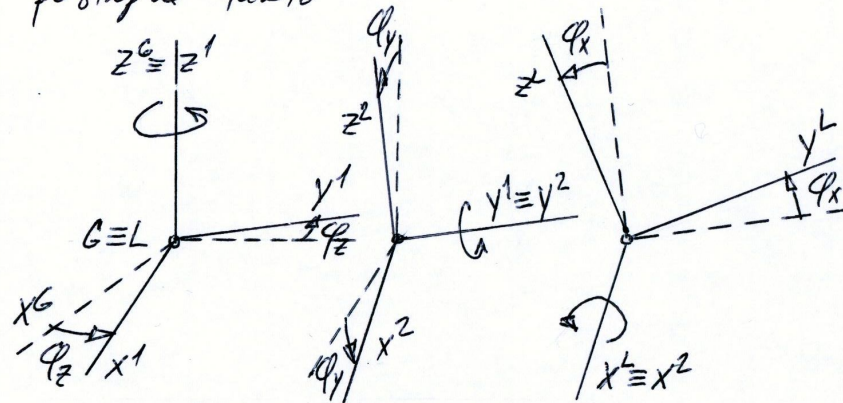
Určit:

- sférický pohyb kužele vypočítat
- sférický úhel v systému "321";
- polohu a rychlost obecného bodu B kužele ve složkách globálního SS;

KIN-11-1.1

- úhlovou rychlost kužele a rychlost obecného bodu B ve složkách lokálního SS.

Řešení: V systému sférických úhlů "321" dodělat k transformaci globálního do lokálního souřadnicového systému postupně takto



Transformační matice je proto dána součinem

$$T^{GL} = T^{G1} T^{12} T^{2L}$$

kde

$$T^{G1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T^{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix}$$

a

$$T^{2L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix}.$$

V daném konkrétním případě je úhel

$$\varphi_z = \lambda,$$

takže

$$\varphi_z(t) = \frac{2\pi}{T} t, \quad \dot{\varphi}_z = \frac{2\pi}{T}.$$

Protože dle je rovina (x^G, y^G) krouží rovinnou valivostí se křivkou, je úhel φ_y trvale roven úhlu β mezi površkou a osou křivky, tedy

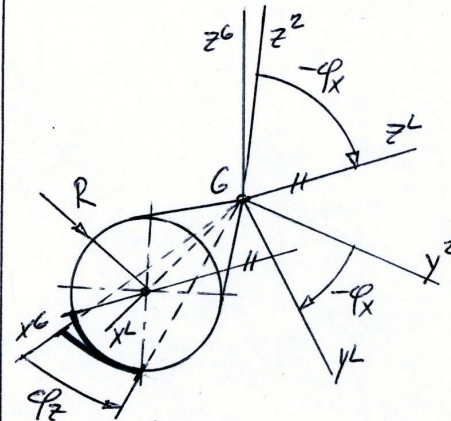
$$\varphi_y = -\arctg \frac{R}{H} = -\beta = \text{konst.}$$

(Záporné znaménko vyplývá ze směřování úhlu β s kladným

KIN-11-1.2

smyslem úhlu φ_y .)

Úhel φ_x souvisí s úhlem φ_z prostřednictvím podmiňující rovnice, která se i v tomto případě lze formulovat pomocí "odvalovacího oblouku".



Oblouk opsaný koncovými body povrchu křivky o délce $L = \sqrt{H^2 + R^2}$ je roven

$$\varphi_z L = \varphi_z \sqrt{H^2 + R^2}$$

a má stejnou délku jako odvalovací oblouk

$$-\varphi_x R$$

na zhlédnutí křivky. (Záporné znaménko opět souvisí s kladnou orientací úhlu φ_x - viz předchozí obrázek.)

Plošná tedy

$$\varphi_x = -\varphi_z \frac{\sqrt{H^2 + R^2}}{R} = -\frac{\varphi_z}{\sin \beta},$$

$$\dot{\varphi}_x = -\frac{\dot{\varphi}_z}{\sin\beta} = -\frac{2\pi}{T \sin\beta}.$$

Okamžitá poloha stečného bodu B kužele je pro případ $L \equiv G$ dále transformován rovnici

$$\mathbf{r}_B^G = \mathbf{T}^{G1} \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{2L} \mathbf{r}_B^L,$$

přičemž dle transformovaných rovnice jed' není nutno proměšobovat.

Rychlost stečného bodu B vyjádřeno složkami v GSS je pak

$$\mathbf{v}_B^G = \dot{\mathbf{r}}_B^G = \left(\dot{\mathbf{T}}^{G1} \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{2L} + \mathbf{T}^{G1} \dot{\mathbf{T}}^{12} \mathbf{T}^{2L} + \mathbf{T}^{G1} \mathbf{T}^{12} \dot{\mathbf{T}}^{2L} \right) \mathbf{r}_B^L,$$

přičemž

$$\dot{\mathbf{T}}^{G1} = \dot{\varphi}_z \frac{d\mathbf{T}^{G1}}{d\varphi_z} = \dot{\varphi}_z \begin{bmatrix} -\sin\varphi_z & -\cos\varphi_z & 0 \\ \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{12} = 0,$$

KIN-11-1.3

protože úhel $\varphi_y = -\beta$ je konstantní, a

$$\dot{\mathbf{T}}^{2L} = \dot{\varphi}_x \frac{d\mathbf{T}^{2L}}{d\varphi_x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_x & -\cos\varphi_x \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \end{bmatrix}.$$

Rychlost bodu B vyjádřeno ve složkách LSS je pak

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B^L &= (\mathbf{T}^{G1} \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{2L})^T \mathbf{v}_B^G = \\ &= \left[(\mathbf{T}^{2L})^T (\mathbf{T}^{12})^T (\mathbf{T}^{G1})^T \dot{\mathbf{T}}^{G1} \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{2L} + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{T}^{2L})^T (\mathbf{T}^{12})^T (\mathbf{T}^{G1})^T \mathbf{T}^{G1} \mathbf{T}^{12} \dot{\mathbf{T}}^{2L} \right] \mathbf{r}_B^L = \\ &= \left[(\mathbf{T}^{2L})^T (\mathbf{T}^{12})^T (\mathbf{T}^{G1})^T \dot{\mathbf{T}}^{G1} \mathbf{T}^{12} \mathbf{T}^{2L} + (\mathbf{T}^{2L})^T \dot{\mathbf{T}}^{2L} \right] \mathbf{r}_B^L \end{aligned}$$

Soudrín $(\mathbf{T}^{G1})^T \dot{\mathbf{T}}^{G1} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_z & \sin\varphi_z & 0 \\ -\sin\varphi_z & \cos\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\varphi_z & -\cos\varphi_z & 0 \\ \cos\varphi_z & -\sin\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_z,$$

a potebno $(T^{2L})^T \dot{T}^{2L} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \\ 0 & \sin\varphi_x & \cos\varphi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_x & -\cos\varphi_x \\ 0 & \cos\varphi_x & -\sin\varphi_x \end{bmatrix} \dot{\varphi}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_x$$

Dále potom $(T^{12})^T (T^{61})^T \dot{T}^{61} T^{12} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & -\sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_y & 0 & \cos\varphi_y \end{bmatrix} \dot{\varphi}_z =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi_y & 0 \\ \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ 0 & -\sin\varphi_y & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_z$$

a $(T^{2L})^T (T^{12})^T (T^{61})^T \dot{T}^{61} T^{12} T^{2L} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\cos\varphi_x \cos\varphi_y & \sin\varphi_x \cos\varphi_y \\ \cos\varphi_x \cos\varphi_y & 0 & \sin\varphi_y \\ -\sin\varphi_x \cos\varphi_y & -\sin\varphi_y & 0 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_z$$

Po dosazení m'že dostaneme

$$\vec{V}_B^L = \begin{bmatrix} (-\cos\varphi_x \cos\varphi_y \dot{\varphi}_B^L + \sin\varphi_x \cos\varphi_y \dot{z}_B^L) \dot{\varphi}_z \\ (\cos\varphi_x \cos\varphi_y \dot{x}_B^L + \sin\varphi_y \dot{z}_B^L) \dot{\varphi}_z - \dot{z}_B^L \dot{\varphi}_x \\ (-\sin\varphi_x \cos\varphi_y \dot{x}_B^L - \sin\varphi_y \dot{y}_B^L) \dot{\varphi}_z + \dot{y}_B^L \dot{\varphi}_x \end{bmatrix}$$

Úhlovou rychlost sférického pohybu
kružice $\vec{\omega}$ dostaneme srovnáním
posledního výsledku s výsledkem
operace $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{LB}$,

provedené v lokální souř. syst.,
tedy

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{LB} = \begin{vmatrix} \vec{i}_L & \vec{j}_L & \vec{k}_L \\ \omega_x^L & \omega_y^L & \omega_z^L \\ x_B^L & y_B^L & z_B^L \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}_L (\omega_y^L z_B^L - \omega_z^L y_B^L) + \vec{j}_L (\omega_z^L x_B^L - \omega_x^L z_B^L) + \vec{k}_L (\omega_x^L y_B^L - \omega_y^L x_B^L)$$

Výsledkem srovnání je

$$\omega_x^L = -\sin\varphi_y \dot{\varphi}_z + \dot{\varphi}_x$$

$$\omega_y^L = \sin\varphi_x \cos\varphi_y \dot{\varphi}_z$$

$$\omega_z^L = \cos\varphi_x \cos\varphi_y \dot{\varphi}_z$$

nebo

$$\omega^L = \begin{bmatrix} -\sin\varphi_y \dot{\varphi}_z + \dot{\varphi}_x \\ \sin\varphi_x \cos\varphi_y \dot{\varphi}_z \\ \cos\varphi_x \cos\varphi_y \dot{\varphi}_z \end{bmatrix},$$

přičemž platí výše uvedené
vztahy mezi φ_x a φ_z a $\dot{\varphi}_x$ a $\dot{\varphi}_z$.