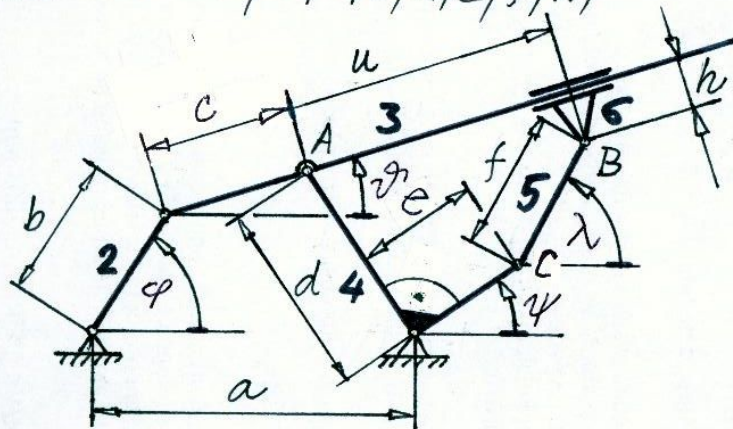


Príklad 13.1. Kinematická analýza
čtyřčlenného mechanismu s přidruženou
binární skupinou.

Dáno: Rozměry a, b, c, d, e, f, h ;



Určit:

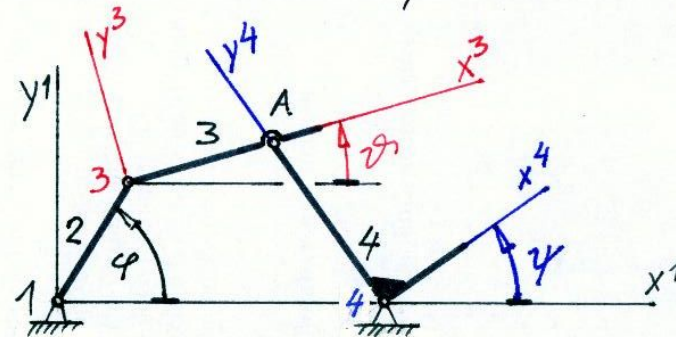
Združené závislosti $\varphi(\varphi), \psi(\varphi), \lambda(\varphi), u(\varphi)$;

1. převodové funkce $\mu_{\varphi\psi}, \mu_{\varphi\lambda}, \mu_{\varphi u}$;

2. převodové funkce $\nu_{\varphi\psi}, \nu_{\varphi\lambda}, \nu_{\varphi u}$;

Řešení: Analýzu je třeba začít
vždy u základního čtyřčlenného
mechanismu. Zde je to mecha-

KIN-13-1.1
visuální trojúhelník čísel 1, 2, 3 a 4.



1. Jednotlivým tělesům přiřadíme souřadnicové systémy. Obvykle uveřejníme u každého tělesa. Zde postačí zavést SS: $(1, x^1, y^1)$ pro základní rám 1, $(3, x^3, y^3)$ pro ojnici 3 a $(4, x^4, y^4)$ pro valečko 4.

2. Identifikujeme bod A jako válcový bod

3. Válcový bod vložíme do transformačních rovnic pro tělesa 3 a 4:

$$\mathbf{r}_A^1 = \mathbf{r}_3^1 + \mathbf{T}^{13} \mathbf{r}_A^3 = \mathbf{r}_4^1 + \mathbf{T}^{14} \mathbf{r}_A^4 = \mathbf{r}_A^1 \quad (1)$$

Tím dostáváme základní rovnici

mechanismu.

4. Vatebné podmienky jsou

$$x_A^3 = c, y_A^3 = 0, x_A^4 = 0, y_A^4 = d.$$

5. Specifikace vektorů a uvaž rovnice

(1) s průběžnostmi k vatebným podmínkám:

$$r_3^1 = \begin{bmatrix} b \cos \varphi \\ b \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix}, T^1_3 = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, r_A^3 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_4^1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, T^1_4 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, r_A^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Specifikované vektory dosadíme do (1) a hned píšeme odpovídající skalární rovnice

$$b \cos \varphi + c \cos \vartheta = a - d \sin \psi \quad (2)$$

$$b \sin \varphi + c \sin \vartheta = d \cos \psi. \quad (3)$$

KIN-13-1.2

7. V těchto rovnících je φ parametrem a neznámé jsou dva úhly, ϑ a ψ .

Řešení provedeme ve dvou krocích. V prvním vynásobíme vtebnou ψ :

$$\begin{aligned} a - b \cos \varphi - c \cos \vartheta &= d \sin \psi \quad |^2 \\ b \sin \varphi + c \sin \vartheta &= d \cos \psi \quad |^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b \cos \varphi)^2 - 2(a - b \cos \varphi)c \cos \vartheta + c^2 \cos^2 \vartheta + \\ + b^2 \sin^2 \varphi + 2bc \sin \varphi \sin \vartheta + c^2 \sin^2 \vartheta &= d^2 \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme úplnou rovnici trigonometrickou pro neznámou ϑ ve tvaru

$$\begin{aligned} -(a - b \cos \varphi) \cos \vartheta + b \sin \varphi \sin \vartheta &= \\ &= \frac{d^2 - c^2 - (a - b \cos \varphi)^2 - b^2 \sin^2 \varphi}{2c} \end{aligned}$$

Čitatele pravostanného čtení lze ještě zjednodušit, takže konečný

trav rovnice je

$$-(a-b\cos\varphi)\cos\vartheta + b\sin\varphi\sin\vartheta = \frac{d^2 - c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi}{2c}$$

a její řešení podle známého vzorce je

$$\vartheta = \arcsin \frac{d^2 - a^2 - b^2 - c^2 + 2ab\cos\varphi}{\pm 2c \sqrt{(a-b\cos\varphi)^2 + b^2\sin^2\varphi}} + \arctg \frac{a-b\cos\varphi}{b\sin\varphi} \quad (4)$$

To už je ale finální tvar závislosti $\vartheta(\varphi)$.

Ve druhém kroku vypočteme z rovnice (2) a (3) ψ a tím máme závislost $\psi(\varphi)$. Rovnice (2) a (3) upravíme na tvar

$$c\cos\vartheta = (a-b\cos\varphi) - d\sin\psi$$

$$c\sin\vartheta = -b\sin\varphi + d\cos\psi,$$

KIN-13-1.3

umocníme na druhou a sečteme. Pak

$$c^2 = (a-b\cos\varphi)^2 - 2(a-b\cos\varphi)d\sin\psi + d^2\sin^2\psi + b^2\sin^2\varphi - 2bd\sin\varphi\cos\psi + d^2\cos^2\psi.$$

Po úpravě máme opět úplnou rovnici trigonometrickou, tentokrát pro úhlem ψ ve tvaru

$$-b\sin\varphi\cos\psi - (a-b\cos\varphi)\sin\psi = \frac{c^2 - d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi}{2d}.$$

Její řešení

$$\psi = \arcsin \frac{c^2 - d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos\varphi}{\pm 2d \sqrt{(a-b\cos\varphi)^2 + b^2\sin^2\varphi}} - \arctg \frac{b\sin\varphi}{a-b\cos\varphi} \quad (5)$$

dostáváme už finální tvar závislosti $\psi(\varphi)$.

8. 1. derivace funkce $\mu_{\varphi\vartheta}$ a $\mu_{\varphi\psi}$ máme jako derivace příslušných

zdvížených θ a φ , ale nikoliv
derivacím θ a φ ani
přímou derivací θ a φ implicitně.
Výhodné je totiž implicitně derivovat
přímou základní rovnici (2) a (3)
podle φ :

$$-b \sin \varphi - c \sin \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = -d \cos \varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} \quad (6)$$

$$b \cos \varphi + c \cos \theta \frac{d\theta}{d\varphi} = -d \sin \varphi \frac{d\varphi}{d\varphi} \quad (7)$$

Dostáváme dvě lineární rovnice
pro neznámé $d\theta/d\varphi = \mu_{\theta\varphi}$ a
 $d\varphi/d\varphi = \mu_{\varphi\varphi}$. Vyřešíme je např.
Cramerovou pravidlem po přání
do maticové formy

$$\begin{bmatrix} -c \sin \theta & d \cos \varphi \\ c \cos \theta & d \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{\theta\varphi} \\ \mu_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \sin \varphi \\ -b \cos \varphi \end{bmatrix}$$

KIN-13-1.4

Determinant soustavy je

$$\Delta = \begin{vmatrix} -c \sin \theta & d \cos \varphi \\ c \cos \theta & d \sin \varphi \end{vmatrix} = -cd \cos(\varphi - \theta),$$

takže

$$\mu_{\theta\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} b \sin \varphi & d \cos \varphi \\ -b \cos \varphi & d \sin \varphi \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{bd \cos(\varphi - \varphi)}{cd \cos(\varphi - \theta)} \quad (8)$$

a

$$\mu_{\varphi\varphi} = \frac{\begin{vmatrix} -c \sin \theta & b \sin \varphi \\ c \cos \theta & -b \cos \varphi \end{vmatrix}}{\Delta} = -\frac{bc \sin(\theta - \varphi)}{cd \cos(\varphi - \theta)} \quad (9)$$

1. 2. převodové funkce $\mu_{\theta\theta}$ a $\mu_{\varphi\theta}$
máme implicitně derivacím
rovnice (6) a (7). Dostáváme

$$\begin{aligned} -b \cos \varphi - c \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - c \sin \theta \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} &= \\ &= d \sin \varphi \left(\frac{d\varphi}{d\varphi} \right)^2 - d \cos \varphi \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$-b \sin \varphi - c \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 + c \cos \vartheta \frac{d^2 \vartheta}{d\varphi^2} = \quad (11)$$

$$= -d \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 - d \sin \psi \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2}$$

to je opet dvojice lineárních rovníc,
tentokráte pro neurčité $d^2 \vartheta / d\varphi^2 = v_{\vartheta\vartheta}$ a
 $d^2 \psi / d\varphi^2 = v_{\psi\psi}$. Přepíšeme-li je do ma-
tricového tvaru

$$\begin{bmatrix} -c \sin \vartheta & d \cos \psi \\ c \cos \vartheta & d \sin \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\vartheta\vartheta} \\ v_{\psi\psi} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} b \cos \varphi + c \cos \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 + d \sin \psi \mu_{\varphi\psi}^2 \\ b \sin \varphi + c \sin \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 - d \cos \psi \mu_{\varphi\psi}^2 \end{bmatrix},$$

vidíme, že uvažovaný soustava je stejně
jako při výpočtu prvních převo-
dových funkcí. Cramerovým

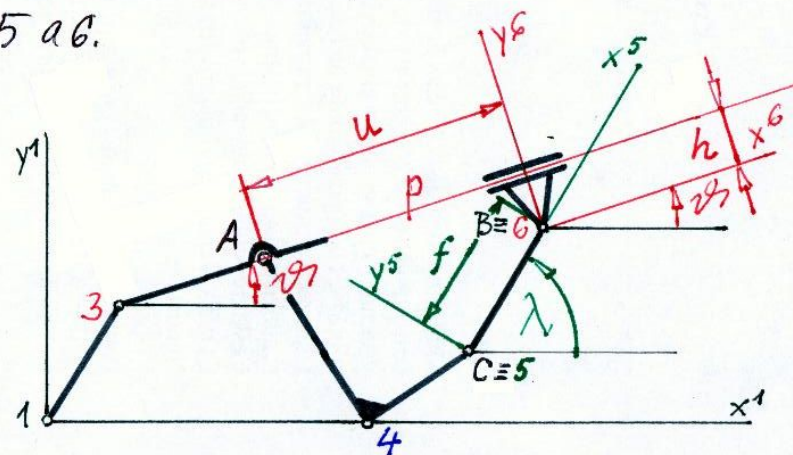
KIN-13-1.5

pravidlem tak dostáváme

$$v_{\vartheta\vartheta} = \frac{\begin{vmatrix} b \cos \varphi + c \cos \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 + d \sin \psi \mu_{\varphi\psi}^2 & d \cos \psi \\ b \sin \varphi + c \sin \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 - d \cos \psi \mu_{\varphi\psi}^2 & d \sin \psi \end{vmatrix}}{-cd \cos(\psi - \vartheta)} \quad (12)$$

$$v_{\psi\psi} = \frac{\begin{vmatrix} -c \sin \vartheta & b \cos \varphi + c \cos \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 + d \sin \psi \mu_{\varphi\psi}^2 \\ c \cos \vartheta & b \sin \varphi + c \sin \vartheta \mu_{\varphi\vartheta}^2 - d \cos \psi \mu_{\varphi\psi}^2 \end{vmatrix}}{-cd \cos(\psi - \vartheta)} \quad (13)$$

Nyní můžeme provést analýzu
kinematické skupiny p-r-r ze čtení
5 a 6.



Postupujeme ve stejných krocích jako u úplných mechanismů tří- nebo čtyřčlenných.

1. Zavedeme souřadnicový systém $(5, x^5, y^5)$ a $(6, x^6, y^6)$ pro tělesa 5 a 6 bicími skupiny. Vzhledem k posuvné vazbě mezi členy 3 a 6 máme osy x^6, y^6 rovnoběžné s x^3, y^3 . V důsledku toho bude

$$\mathcal{T}^{16} = \mathcal{T}^{13}. \quad (14)$$

2. Vazebnými body jsou body A, B, C, protože bod C je společný bod těles 4 a 5, bod B je společný bod těles 5 a 6. Vazba u bodě A je jiného druhu. Ploha zde $A \in p$, protože přímka p je osou posuvné vazby mezi tělesy 3 a 6.

- 3., 4. Polohy bodů A a C jsou známy

KIN-13-1.6

z různých základních čtyřčlenných mechanismů

$$\mathbf{r}_A^1 = \mathbf{r}_3^1 + \mathcal{T}^{13} \mathbf{r}_A^3 \quad (15)$$

$$\mathbf{r}_C^1 = \mathbf{r}_4^1 + \mathcal{T}^{14} \mathbf{r}_C^4 \quad (16)$$

Transformační rovnice pro bod B tělesa 5 je

$$\mathbf{r}_B^1 = \mathbf{r}_5^1 + \mathcal{T}^{15} \mathbf{r}_B^5 \quad (17)$$

a pro bod A tělesa 6

$$\mathbf{r}_A^1 = \mathbf{r}_6^1 + \mathcal{T}^{16} \mathbf{r}_A^6. \quad (18)$$

K tomu uvažujeme plohu p ,

$$\mathbf{r}_C^1 = \mathbf{r}_B^1 \quad (19)$$

$$\mathbf{r}_5^1 = \mathbf{r}_C^1. \quad (20)$$

Složíme-li rovnice (15) a (20) dohromady, máme

$$\mathbf{r}_3^1 + \mathcal{T}^{13} \mathbf{r}_A^3 = \mathbf{r}_4^1 + \mathcal{T}^{14} \mathbf{r}_C^4 + \mathcal{T}^{15} \mathbf{r}_B^5 + \mathcal{T}^{16} \mathbf{r}_A^6$$

a s přihlednutím ke (14) po úpravě

$$\mathbf{r}_3^1 - \mathbf{r}_4^1 - \mathcal{T}^{14} \mathbf{r}_C^4 = \mathcal{T}^{15} \mathbf{r}_B^5 + \mathcal{T}^{16} (\mathbf{r}_A^6 - \mathbf{r}_A^3) \quad (21)$$

dostáváme základní rovnici bicími

skupiny.

5. Specifikujeme vektory a matice rovnice (21). Z výsledků závislosti mechanismu máme vektory $\mathbf{r}_3^1, \mathbf{r}_4^1$ a $\mathbf{r}_A^3$ a matice $\mathbf{T}^{13} = \mathbf{T}^{16}$ a $\mathbf{T}^{14}$. Zbývá tedy specifikovat

$$\mathbf{r}_c^4 = \begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{15} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_B^5 = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_A^6 = \begin{bmatrix} -u \\ h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Specifikujeme vektory a matice dosadíme do (21) a píšeme odpovídající skalární rovnice

$$b \cos \varphi - a - e \cos \psi = f \cos \lambda - (u+c) \cos \vartheta - h \sin \vartheta \quad (22)$$

$$b \sin \varphi - e \sin \psi = f \sin \lambda - (u+c) \sin \vartheta + h \cos \vartheta \quad (23)$$

V těchto rovnicích jsou ϑ a ψ známé funkce φ (z výsledků závislosti mechanismu).

KIN-13-1.7

Sloučíme proto známé členy obou rovníc do nových funkcí

$$X(\varphi) = b \cos \varphi - a - e \cos \psi(\varphi) + c \cos \vartheta(\varphi) + h \sin \vartheta(\varphi)$$

$$Y(\varphi) = b \sin \varphi - e \sin \psi(\varphi) + c \sin \vartheta(\varphi) - h \cos \vartheta(\varphi)$$

a zapíšeme rovnice (22), (23) ve zjednodušeném tvaru

$$f \cos \lambda - u \cos \vartheta(\varphi) = X(\varphi) \quad (24)$$

$$f \sin \lambda - u \sin \vartheta(\varphi) = Y(\varphi). \quad (25)$$

7. V rovnicích (24), (25) jsou neznámé

λ a u . Pro určení λ eliminujeme u Gaussovým způsobem. Dostaneme

$$f(\sin \lambda \cos \vartheta - \cos \lambda \sin \vartheta) = -X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta,$$

$$\text{tj.} \quad \sin(\lambda - \vartheta) = \frac{-X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta}{f}$$

a ukořec

$$\lambda = \arcsin \frac{-X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta}{f} + \vartheta. \quad (26)$$

Pro uřetření u přepíšeme rovnice (24), (25) do tvaru

$$f \cos \lambda = u \cos \vartheta + X$$

$$f \sin \lambda = u \sin \vartheta + Y,$$

poněkud je uo dráhu a sečteno.

Dostaneme

$$f^2 = u^2 + 2uX \cos \vartheta + X^2 + 2uY \sin \vartheta + Y^2.$$

To je ale kvadratická rovnice

$$u^2 + 2(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta)u + X^2 + Y^2 - f^2 = 0.$$

pro u s řešením podle klasického vzorce

$$u_{1,2} = -(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta) \pm \sqrt{(X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta)^2 - X^2 - Y^2 + f^2}. \quad (27)$$

Protože X, Y a ϑ jsou známy (viz výše) funkce φ , představují výsledky (26) a (27) hledané zdrinové závislosti $\lambda(\varphi)$ a $u(\varphi)$.

KIN-13-1.8

8. Proti-derivát funkce

$\mu_{\varphi\lambda} = d\lambda/d\varphi$ a $\mu_{\varphi u} = du/d\varphi$ určíme opět implicitním derivováním rovnice

(24) a (25) podle φ . Dostaneme rovnice

$$-f \sin \lambda \frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{du}{d\varphi} \cos \vartheta + u \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dX}{d\varphi} \quad (28)$$

$$f \cos \lambda \frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{du}{d\varphi} \sin \vartheta - u \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{dY}{d\varphi}. \quad (29)$$

s neznámými $\mu_{\varphi\lambda} = d\lambda/d\varphi$ a $\mu_{\varphi u} = du/d\varphi$.

Přepíšeme je do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} f \sin \lambda & \cos \vartheta \\ f \cos \lambda & -\sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{\varphi\lambda} \\ \mu_{\varphi u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \sin \vartheta \mu_{\varphi\vartheta} - dX/d\varphi \\ u \cos \vartheta \mu_{\varphi\vartheta} + dY/d\varphi \end{bmatrix}$$

Determinant soustavy je uhyt

$$\begin{vmatrix} f \sin \lambda & \cos \vartheta \\ f \cos \lambda & -\sin \vartheta \end{vmatrix} = -f(\sin \lambda \sin \vartheta + \cos \lambda \cos \vartheta) = -f \cos(\lambda - \vartheta)$$

a jednoduše uvažujeme 1. derivát funkce

$$\mu_{\varphi\lambda} = \frac{\begin{vmatrix} u \sin \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} - \frac{dX}{d\varphi}) & \cos \vartheta \\ u \cos \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} + \frac{dY}{d\varphi}) & -\sin \vartheta \end{vmatrix}}{-f \cos(\lambda - \vartheta)}$$

$$\mu_{\varphi u} = \frac{\begin{vmatrix} f \sin \lambda & u \sin \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} - \frac{dX}{d\varphi}) \\ f \cos \lambda & u \cos \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} + \frac{dY}{d\varphi}) \end{vmatrix}}{-f \cos(\lambda - \vartheta)}$$

9. Druhé pravodobé funkce $\nu_{\varphi\lambda} = d^2\lambda/d\varphi^2$

a $\nu_{\varphi u} = d^2u/d\varphi^2$ pomocí implicitních derivací v rovnici (28) a (29) podle φ .

$$\begin{aligned} & -f \cos \lambda \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 - f \sin \lambda \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} - \frac{d^2u}{d\varphi^2} \cos \vartheta + \\ & + \frac{du}{d\varphi} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} + u \cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 + \\ & + u \sin \vartheta \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = \frac{d^2X}{d\varphi^2} \end{aligned}$$

KIN-13-1.9

$$-f \sin \lambda \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 + f \cos \lambda \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} - \frac{d^2u}{d\varphi^2} \sin \vartheta -$$

$$- \frac{du}{d\varphi} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} - \frac{du}{d\varphi} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} + u \sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{d\varphi} \right)^2 -$$

$$- u \cos \vartheta \frac{d^2\vartheta}{d\varphi^2} = \frac{d^2Y}{d\varphi^2}$$

Prápis do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} f \sin \lambda & \cos \vartheta \\ f \cos \lambda & -\sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{\varphi\lambda} \\ \nu_{\varphi u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f \cos \lambda \mu_{\varphi\lambda}^2 + \\ f \sin \lambda \mu_{\varphi\lambda}^2 + \\ + 2\mu_{\varphi u} \sin \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} + u \cos \vartheta \mu_{\varphi\vartheta} + u \sin \vartheta \nu_{\varphi\vartheta} - d^2X/d\varphi^2) \\ + 2\mu_{\varphi u} \cos \vartheta (\mu_{\varphi\vartheta} - u \sin \vartheta \mu_{\varphi\vartheta} + u \cos \vartheta \nu_{\varphi\vartheta} + d^2Y/d\varphi^2) \end{bmatrix}$$

opět pomocí vzájemí Cramerovyho pravidlem.